

Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.

Forschungsbericht 2005-20

Ein blockstrukturiertes Verfahren  
zur Simulation der Umströmung  
komplexer Konfigurationen

Thorsten Schwarz

Institut für Aerodynamik und  
Strömungstechnik  
Braunschweig





Ein blockstrukturiertes Verfahren  
zur Simulation der Umströmung  
komplexer Konfigurationen

Thorsten Schwarz

Institut für Aerodynamik und  
Strömungstechnik  
Braunschweig

122 Seiten  
63 Bilder  
9 Tabellen  
119 Literaturstellen





# Ein blockstrukturiertes Verfahren zur Simulation der Umströmung komplexer Konfigurationen

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von  
Thorsten Ole Schwarz  
aus Hamburg

Eingereicht am: 24.06.2005

Mündliche Prüfung am: 14.10.2005

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. H. Körner  
Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. Rossow



# **Ein blockstrukturiertes Verfahren zur Simulation der Umströmung komplexer Konfigurationen**

Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.

Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik  
Abteilung Numerische Verfahren  
Lilienthalplatz 7, 38108 Braunschweig

Braunschweig, im November 2005

Institutsdirektor:  
Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. Rossow

Verfasser:  
Dipl.-Ing. T. Schwarz

Abteilungsleiter:  
Prof. Dr.-Ing. N. Kroll

## Abstract

A block structured method for the simulation of the viscous flow around complex configurations is presented. The computational domain is discretized with overlapping meshes. The meshes are composed of individually created grids for the components of a configuration and an automatically generated Cartesian background grid. The background grid is a multi-block mesh with hanging grid nodes, which is adapted to the cell size of the component grids. The cells of the background grid can be cubes or cuboids. The overlapping grid approach simplifies the generation of block structured grids significantly.

The flow computations are performed with a Navier-Stokes solver. The Chimera capabilities of the solver are extended by methods for the computation of interpolation coefficients and global forces in case of grid overlap on body surfaces. Additionally, a flux conservative boundary condition for the hanging grid nodes is implemented. For the creation of the Cartesian background grids, an automatic grid generator has been developed.

The consistency and accuracy of the methods is proved by grid refinement studies. Validation test cases involve a three element airfoil, a helicopter fuselage and an airplane in landing configuration. Numerical results obtained for Chimera meshes as well as conventional grids agree very well. The agreement with wind tunnel experiments is good. The computational costs for Chimera computations are slightly higher than for conventional grids.

## Übersicht

Es wird ein blockstrukturiertes Verfahren zur Berechnung der reibungsbehafteten Umströmung komplexer Konfigurationen beschrieben. Das Verfahren nutzt überlappende Rechengitter zur Diskretisierung des Strömungsfeldes. Das Gittersystem besteht aus unabhängig voneinander erstellten Netzen für die Komponenten einer Konfiguration, die in ein automatisiert generiertes, kartesisches Hintergrundgitter eingebettet sind. Das Hintergrundgitter ist ein an die Netzfeinheit der Komponentengitter adaptiertes Mehrblocknetz mit hängenden Netzknoten, dessen Netzzellen sowohl würfelförmig als auch quaderförmig sein können. Durch die Verwendung überlappender Gitter wird der Netzgenerierungsprozess deutlich vereinfacht.

Die Strömungssimulationen werden mit einem Navier-Stokes Verfahren durchgeführt. Bei diesem wurden die Chimären-Algorithmen durch Methoden zur Dateninterpolation und Kraftberechnung bei Gittern mit Netzüberlappungen auf Körperoberflächen erweitert. Außerdem wurde eine Randbedingung für Blockübergänge mit hängenden Netzknoten implementiert. Die Hintergrundgitter werden mit einem kartesischen Netzgenerator erstellt.

Netzkonvergenzstudien für reibungslose und reibungsbehaftete Profilmströmungen belegen die Konsistenz und die Genauigkeit des Verfahrens. Die Validierung erfolgt mit Strömungssimulationen für ein Dreielement-Profil, einen Hubschrauberrumpf und eine Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der numerisch auf konventionellen bzw. überlappenden Gittern erzielten Ergebnisse und eine gute Übereinstimmung mit Windkanalmessungen. Die Vergleichsrechnungen ergeben bei Chimären-Rechnungen einen etwas höheren Rechenzeitbedarf als bei konventionellen Gittern.



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e. V.

Mein herzlicher Dank gilt all denjenigen, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben. Zunächst danke ich dem ehemaligen Leiter des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Körner für die Übernahme der wissenschaftlichen Betreuung dieser Arbeit und den detaillierten Hinweisen insbesondere zur Interpretation experimenteller Ergebnisse. Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel von der Technischen Universität Braunschweig danke ich für die Übernahme des Ko-referats und die inhaltlichen Anregungen. Dem jetzigen Leiter des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. Rossow danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Körner und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. Rossow sei weiterhin für die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen am Institut gedankt.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Abteilungsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. N. Kroll, der die Arbeit mit vielen wissenschaftlichen Gesprächen begleitete und der mir immer den nötigen Freiraum zum Erstellen dieser Arbeit ließ. Weiterthin gilt mein herzlicher Dank meinen Kollegen Herrn Dr.-Ing. K. Pahlke, Herrn Dipl.-Ing. J. Raddatz und Herrn Dr.-Ing. R. Heinrich für die vielen fachlichen Diskussionen. Auch allen anderen Kollegen des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik sei für die sehr gute Arbeitsatmosphäre und die mir entgegengebrachte Hilfsbereitschaft gedankt.





# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Bezeichnungen</b>  | <b>xv</b> |
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Numerische Strömungssimulationen in der Luftfahrtindustrie . . . . .                    | 1         |
| 1.2 Blockstrukturierte Rechenverfahren . . . . .  | 2         |
| 1.3 Flexibilisierung blockstrukturierter Verfahren durch die Chimären-<br>Technik . . . . . | 3         |
| 1.4 Stand der Technik . . . . .   | 4         |
| 1.4.1 Nutzung der Chimären-Technik . . . . .  | 5         |
| 1.4.2 Industriell eingesetzte Chimären-Verfahren . . . . .                                  | 10        |
| 1.5 Ziel der Arbeit . . . . .   | 11        |
| <b>2 Berechnung von instationären, reibungsbehafteten Strömungen</b>                        | <b>15</b> |
| 2.1 Grundgleichungen . . . . .  | 15        |
| 2.1.1 Grundgleichungen der Hauptströmung . . . . .  | 15        |
| 2.1.2 Transportgleichungen der Turbulenzgrößen . . . . .                                    | 19        |
| 2.2 Numerisches Verfahren zur Lösung der Strömungsgleichungen . . . . .                     | 20        |
| 2.2.1 Räumliche Diskretisierung der Hauptgleichungen . . . . .                              | 20        |
| 2.2.2 Räumliche Diskretisierung der Turbulenzgleichungen . . . . .                          | 23        |
| 2.2.3 Zeitliche Diskretisierung der Hauptgleichungen . . . . .                              | 24        |
| 2.2.4 Konvergenzbeschleunigung expliziter Zeitschrittverfahren . . . . .                    | 25        |
| 2.2.5 Zeitliche Diskretisierung der Turbulenzgleichungen . . . . .                          | 27        |
| 2.2.6 Randbedingungen . . . . .   | 28        |
| 2.2.7 Vorkonditionierung . . . . .  | 29        |
| 2.2.8 Duales Zeitschrittverfahren . . . . .   | 30        |
| 2.2.9 Parallelisierung . . . . .  | 31        |
| <b>3 Chimären-Technik</b>   | <b>35</b> |
| 3.1 Grundlagen . . . . .  | 35        |
| 3.2 Implementierung des Chimären-Verfahrens . . . . .                                       | 37        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.2.1    | Lochdefinition . . . . .   | 38        |
| 3.2.2    | Suche nach Spenderzellen und Interpolation . . . . .   | 39        |
| 3.2.3    | Netzüberlappung auf Körperoberflächen . . . . .  | 42        |
| 3.2.4    | Erweiterungen des Lösungsverfahrens . . . . .  | 45        |
| 3.2.5    | Relativ zueinander bewegte Netze . . . . .   | 46        |
| 3.2.6    | Parallelisierung der Chimären-Technik . . . . .  | 47        |
| 3.3      | Berechnung globaler Kräfte und Momente bei Netzüberlappungen auf Körperoberflächen . . . . . | 48        |
| 3.3.1    | Entfernung der Überlappung . . . . .   | 49        |
| 3.3.2    | Triangulierung der Spalten . . . . .   | 50        |
| 3.3.3    | Kraftberechnung . . . . .  | 52        |
| <b>4</b> | <b>Kartesische Hintergrundnetze</b>  | <b>55</b> |
| 4.1      | Generierung kartesischer Hintergrundnetze . . . . .  | 55        |
| 4.1.1    | Der Adaptionsalgorithmus . . . . .   | 55        |
| 4.1.2    | Der Geometriesensor . . . . .  | 57        |
| 4.1.3    | Verringerung der Zahl der Netzblöcke . . . . .   | 59        |
| 4.2      | Numerische Behandlung hängender Netzknoten . . . . .   | 61        |
| 4.2.1    | Implementierung einer Randbedingung für hängende Netzknoten                                  | 61        |
| 4.2.2    | Parallelisierung hängender Netzknoten . . . . .  | 63        |
| <b>5</b> | <b>Ergebnisse</b>  | <b>65</b> |
| 5.1      | Verifikation und Validierung . . . . .   | 65        |
| 5.2      | Netzkonvergenzstudien NACA0012-Profil . . . . .  | 66        |
| 5.2.1    | Subsonische Profilumströmung . . . . .   | 67        |
| 5.2.2    | Transsonische Profilumströmung . . . . .   | 70        |
| 5.3      | L1T2-Dreielement-Hochauftriebsprofil . . . . .   | 73        |
| 5.3.1    | Rechengitter . . . . .   | 73        |
| 5.3.2    | Netzkonvergenzuntersuchung . . . . .   | 75        |
| 5.3.3    | Vergleich mit experimentellen Daten . . . . .  | 77        |
| 5.3.4    | Auftriebskennlinie und Polare . . . . .  | 80        |
| 5.4      | Hubschrauberrumpf mit Bauchstiel . . . . .   | 82        |
| 5.5      | Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration . . . . .  | 86        |
| 5.5.1    | Netzgenerierung . . . . .  | 86        |
| 5.5.2    | Druckverteilungen, Auftriebskennlinie und Polare . . . . .                                   | 89        |
| 5.6      | Rechengeschwindigkeit . . . . .  | 95        |
| <b>6</b> | <b>Zusammenfassung</b>   | <b>99</b> |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>103</b> |
| <b>A Transformationsbeziehungen für bewegte Koordinatensysteme</b>        | <b>113</b> |
| A.1 Einfache Transformationsvorschrift . . . . .                          | 113        |
| A.2 Verkettung von Transformationsvorschriften . . . . .                  | 115        |
| <b>B Ausführliche Darstellung einiger Chimären-Algorithmen</b>            | <b>117</b> |
| B.1 Genauigkeit der Interpolationsvorschrift . . . . .                    | 117        |
| B.2 Das ADT-Suchverfahren . . . . .                                       | 119        |
| B.3 Maximale Ablage einer diskretisierten Oberfläche von der Originalform | 121        |



# Bezeichnungen

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| $\vec{a}$                         | Schenkel eines Dreiecks                                     |
| $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ | Geometrie der vereinfachten Zelle für Geometriesensor       |
| $A$                               | Volumenfluss durch Zellseitenfläche aufgrund Gitterbewegung |
| $\vec{b}$                         | Schenkel eines Dreiecks                                     |
| $c_a$                             | dimensionsloser Auftriebsbeiwert                            |
| $c_p$                             | dimensionsloser Druckbeiwert                                |
| $c_{p0}$                          | dimensionsloser Gesamtdruckbeiwert                          |
| $c_w$                             | dimensionsloser Widerstandsbeiwert                          |
| $C_p$                             | spezifische isobare Wärmekapazität                          |
| $C_v$                             | spezifische isochore Wärmekapazität                         |
| $d$                               | Abstand   |
| $d_1, d_2$                        | Abstände für Wichtungsfunktion bei Chimären-Wandkorrektur   |
| $\vec{d}$                         | Abstandsvektor  |
| $\vec{d}_{i+\frac{1}{2},j,k}$     | dissipativer Fluss  |
| $\vec{d}_M$                       | Vektor zum Kreismittelpunkt                                 |
| $D$                               | räumliche Dimension eines Objekts                           |
| $\vec{D}$                         | Dissipationsoperator  |
| $\mathcal{D}$                     | Diskretisierungsoperator der Modellgleichung                |
| $e$                               | spezifische innere Energie                                  |
| $e_{ADT}$                         | betrachtete räumliche Dimension bei ADT-Suchverfahren       |
| $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ | Richtungseinheitsvektoren                                   |
| $E$                               | totale spezifische Energie                                  |
| $E_{adapt}$                       | Zahl der Adaptionen des kartesischen Gitters                |
| $E_{ADT}$                         | Ebene des ADT-Suchbaums                                     |
| $\mathcal{E}$                     | Empfängergitter   |
| $F_A$                             | Auftrieb  |
| $F_W$                             | Widerstand  |
| $F_x, F_y, F_z$                   | Komponenten des Kraftvektors                                |

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| $\bar{\bar{F}}$                   | Flussdichtetensor   |
| $\bar{\bar{F}}_k$                 | konvektiver Anteil des Flussdichtetensors                                     |
| $\bar{\bar{F}}_v$                 | viskoser Anteil des Flussdichtetensors  |
| $\vec{G}$                         | Quelltermvektor aufgrund Gitterbewegung                                       |
| $h$                               | Netzschnittweite  |
| $H$                               | totale spezifische Enthalpie  |
| $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ | Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem                            |
| $i_{x,x}, i_{x,y}, i_{x,z}$       | Komponenten des kartesischen Einheitsvektors $\vec{i}_x$                      |
| $I$                               | Interpolationsoperator  |
| $IBLANK$                          | Markierung für ausgeblendete Gitterbereiche                                   |
| $k$                               | turbulente kinetische Schwankungsenergie                                      |
| $k^{(2)}, k^{(4)}$                | Skalierungsfaktoren für künstliche Dissipation                                |
| $M$                               | Machzahl  |
| $M_x, M_y, M_z$                   | Komponenten des Momentenvektors   |
| $\mathbf{M}$                      | Matrix  |
| $\vec{n}$                         | Normaleneinheitsvektor  |
| $n_x, n_y, n_z$                   | Komponenten des Normaleneinheitsvektors $\vec{n}$                             |
| $N$                               | Gesamtzellenzahl  |
| $p$                               | Druck   |
| $p_0$                             | Gesamtdruck   |
| $P$                               | Punkt   |
| $P_g$                             | „forcing function“  |
| $Pr$                              | Prandtl-Zahl  |
| $q$                               | Ordnung einer Differentialgleichung   |
| $\vec{q}$                         | Geschwindigkeitsvektor  |
| $\vec{q}_b$                       | Geschwindigkeitsvektor der Berandung eines Kontrollvolumens                   |
| ${}_s\vec{q}_{P_1, P_2}$          | Geschwindigkeit des Punkts 2 gegenüber Punkt 1 in Koordinaten des Systems $s$ |
| $\vec{Q}$                         | Flussbilanz   |
| $r$                               | Radius  |
| $\vec{r}$                         | Ortsvektor  |
| ${}_s\vec{r}_{P_1, P_2}$          | Vektor von Punkt 1 nach Punkt 2 in Koordinaten des Systems $s$                |
| $R$                               | Randbedingung   |
| $\vec{R}$                         | Residuum  |
| $R$                               | spezielle Gaskonstante  |

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $Re$                           | Reynolds-Zahl  |
| $s$                            | Genauigkeitsordnung der Interpolationsvorschrift                     |
| $S$                            | Seitenfläche eines Kontrollvolumens                                  |
| $S_{ref}$                      | Referenzfläche für Beiwertberechnung                                 |
| $\vec{S}_{tu}$                 | Quellterm in Turbulenzgleichung                                      |
| $\mathcal{S}$                  | Spendergitter  |
| $t$                            | Zeit   |
| $T$                            | Temperatur   |
| $\mathbf{T}$                   | Transformationsmatrix  |
| $u, v, w$                      | kartesische Komponenten des Geschwindigkeitsvektors                  |
| $U_\infty$                     | Geschwindigkeit der freien Anströmung, $U_\infty =  \vec{q}_\infty $ |
| $V$                            | Volumen  |
| $\vec{W}$                      | Vektor der konservativen Variablen                                   |
| $x, y, z$                      | kartesische Koordinaten  |
| $x_P, y_P, z_P$                | kartesische Koordinaten eines Punkts                                 |
| $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ | Kantenlänge der vereinfachten Zelle für Geometriesensor              |
| $\vec{x}$                      | Koordinatenvektor  |
| $\vec{x}_P$                    | Koordinatenvektor eines Punkts                                       |
| $\vec{x}_s$                    | Suchbereich für ADT-Suchverfahren                                    |
| $\vec{X}$                      | minimale und maximale Koordinaten einer Menge von Objekten           |
| $X_{min}^d, X_{max}^d$         | Komponenten des Vektors $\vec{X}$                                    |

### Griechische Symbole

|   |   |
|---|---|
| $\alpha$                                      | Anstellwinkel   |
| $\alpha_1, \alpha_2$                          | Hilfsgrößen für Geometriesensor   |
| $\alpha_s$                                    | Koeffizienten des Runge-Kutta-Schemas   |
| $\beta_k, \beta_\omega$                       | Koeffizienten des $k\omega$ -Turbulenzmodells   |
| $\beta_s$                                     | Wichtung der Dissipation bei Runge-Kutta-Zeitintegration                              |
| $\beta_\tau$                                  | Skalierungsfaktor für duales Zeitschrittverfahren                                     |
| $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$                | Interpolationskoeffizienten   |
| $\gamma_\omega$                               | Koeffizient des $k\omega$ -Turbulenzmodells   |
| $\delta$                                      | maximale Ablage einer Zelle eines Oberflächengitters von der tatsächlichen Oberfläche |
| $\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}$        | Skalierungsfaktoren für künstliche Dissipation  |
| $\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k$ | Koeffizienten für implizite Residuenglättung  |
| $\tilde{\Theta}$                              | Kugelkoordinate   |

|  |  |
|--|--|
| $\kappa$                                   | Isentropenexponent   |
| $\lambda$                                  | Wärmeleitfähigkeit   |
| $\lambda_e$                                | effektive Wärmeleitfähigkeit   |
| $\mu$                                      | dynamische Viskosität  |
| $\mu_e$                                    | effektive Viskosität   |
| $\nu$                                      | Drucksensor  |
| $\rho$                                     | Dichte   |
| $\sigma_k, \sigma_\omega$                  | Koeffizienten des $k\omega$ -Turbulenzmodells  |
| $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$    | Normalspannungen   |
| $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$    | Schubspannungen  |
| $\sigma_{w,x}, \sigma_{w,y}, \sigma_{w,z}$ | Komponenten des Vektors der Wandschubspannungen  |
| $\tau$                                     | Pseudozeit   |
| $\Upsilon$                                 | Invariante des Scherratentensors   |
| $\phi$                                     | betrachteter Wert für Netzkonvergenzstudie   |
| $\tilde{\varphi}$                          | Kugelkoordinate  |
| $\psi$                                     | Skalierungsfaktor der künstlichen Dissipation  |
| $\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$                   | Reibungsbeiträge in Energiegleichung   |
| $\omega$                                   | spezifische Dissipationsrate   |
| $\vec{\Omega}$                             | Vektor der Winkelgeschwindigkeit   |
| $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$             | kartesische Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$                                   |
| ${}_s\Omega_{i,j}$                         | Tensor der Winkelgeschwindigkeit des Bezugssystems $j$ gegenüber dem System $i$ in Koordinaten des Systems $s$ |

## Indizes

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $[ ]_0$                   | Inertialsystem                           |
| $[ ]_\infty$              | Strömungswert der ungestörten Anströmung |
| $[ ]^A, [ ]^B$            | Bezeichnung für Gitter                   |
| $[ ]^d$                   | Zähler für räumliche Dimensionen         |
| $[ ]^D$                   | räumliche Dimension eines Objekts        |
| $[ ]_\mathcal{E}$         | auf Empfängergeritter bezogen            |
| $[ ]_f$                   | feines Gitter                            |
| $[ ]_g$                   | grobes Gitter                            |
| $[ ]_{i,j,k}$             | Zellindizes                              |
| $[ ]_{i+\frac{1}{2},j,k}$ | Indizes der Zellseitenflächen            |
| $[ ]_k$                   | körperfestes Koordinatensystem           |
| $[ ]_L$                   | linke Berandung                          |



---

|             |   |
|-------------|---|
| $[ ]_{max}$ | maximaler Wert                          |
| $[ ]_{min}$ | minimaler Wert                          |
| $[ ]^n$     | Iterationszähler                        |
| $[ ]_{op}$  | Erstreckung eines Operators             |
| $[ ]_R$     | rechte Berandung                        |
| $[ ]^{(s)}$ | Stufennummer des Runge-Kutta-Verfahrens |
| $[ ]_S$     | auf Spendergitter bezogen               |
| $[ ]_{tu}$  | Turbulenzgröße                          |
| $[ ]_w$     | Körperoberfläche (Wand)                 |
| $[ ]_z$     | auf Zellzentrum bezogen                 |



# 1 Einleitung

## 1.1 Numerische Strömungssimulationen in der Luftfahrtindustrie

Die numerische Strömungssimulation (CFD - „Computational Fluid Dynamics“) ist neben dem Windkanalexperiment und dem Flugversuch ein wichtiges Hilfsmittel bei der Auslegung von Fluggeräten. Ausgereifte Lösungsalgorithmen sowie die ständig steigende Leistung der Computer ermöglichen heutzutage die Berechnung von reibungsbehafteten Strömungen um realistische Flugzeugkonfigurationen, siehe zum Beispiel Vos et al. [108].

Im industriellen Entwurfsprozess haben Windkanalexperimente und CFD-Simulationen nach Tinoco [105] die gleiche Bedeutung. Entsprechend der anfallenden Kosten werden sie jedoch in unterschiedlichen Anwendungsfeldern eingesetzt. Während ein Windkanalversuch einen hohen Zeit- und Geldaufwand bei der Vorbereitung erfordert, erfolgt die Untersuchung eines einzelnen Strömungszustandes sehr schnell. Demzufolge werden Windkanalexperimente zur Ermittlung großer Datenmengen genutzt, zum Beispiel bei der abschließenden Bewertung einer entworfenen Konfiguration oder für die Ermittlung von Kennfeldern. Die Vorbereitungszeit für eine numerische Simulation ist deutlich kürzer als bei einem Windkanalversuch, allerdings dauert die Berechnung eines einzelnen Strömungszustandes wesentlich länger als eine Windkanalmessung. CFD-Methoden bieten sich somit zur Festlegung der Geometrie des Luftfahrzeugs an, da mit ihnen schnell verschiedene Variationen einer Konfiguration verglichen werden können. Als wesentlicher Vorteil gegenüber Windkanalexperimenten können CFD-Verfahren auch in eine Simulationsumgebung eingebettet werden, welche die Geometrie des Luftfahrzeugs unter Berücksichtigung anderer Disziplinen wie Strukturmechanik und Flugmechanik optimiert.

Windkanaluntersuchungen und Strömungsberechnungen können in sich ergänzender Weise verwendet werden. Da numerische Simulationen bei realistischen Reynoldszahlen erfolgen und sie nicht durch Windkanalinterferenzen gestört werden, dienen sie zur Verbesserung von Korrekturverfahren für Windkanalmessungen. Auch eignen sich CFD-Verfahren besser zur Untersuchung von Details des Strömungsfeldes. Der Einsatzbereich von CFD-Methoden wird jedoch durch Vereinfachungen in der mathematischen Modellbildung beschränkt, so dass beispielsweise die Ermittlung des Maximalauftriebs nur eingeschränkt möglich ist (vgl. Rumsey [92]). Hier muss mit Windkanaluntersuchungen die Zuverlässigkeit der berechneten Daten sichergestellt werden.

Aus den genannten Gründen werden numerische Verfahren routinemäßig im indus-

triellen Entwurfsprozess für Luftfahrzeuge eingesetzt. Als Beispiele können Airbus [6] und Boeing Commercial Airplanes [50] als Hersteller von Transportflugzeugen, EADS Military Aircraft [107] als Produzent von Kampfflugzeugen und der Hubschrauberhersteller Eurocopter [29, 30] genannt werden.

## 1.2 Blockstrukturierte Rechenverfahren

Die Berechnung einer kontinuierlichen, kompressiblen, reibungsbehafteten Strömung erfordert die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Die meisten industriell für die Luftfahrzeugaerodynamik eingesetzten Verfahren lösen dieses Gleichungssystem mit Hilfe eines Finite-Volumen Ansatzes. Dafür gibt der Anwender ein Rechengitter vor, welches den Raum in der Umgebung der betrachteten Konfiguration überdeckt. Die Zellen des Gitters können nun als Kontrollvolumen zur Berechnung der Strömungsgleichungen dienen. In der Vergangenheit wurden im Wesentlichen strukturierte Rechengitter genutzt. Diese bestehen aus einem oder mehreren Netzblöcken mit hexaederförmigen Zellen. Ein Beispiel für ein blockstrukturiertes Rechengitter ist in Bild 1.1 dargestellt.

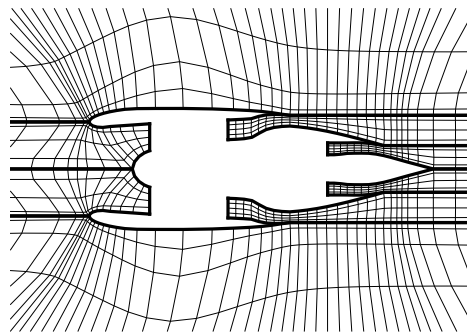


Bild 1.1: Blockstrukturiertes Netz um ein Triebwerk, die Blockgrenzen sind durch dicke Linien markiert

Die Rechenmethoden für strukturierte Rechengitter sind weit entwickelt und ermöglichen eine schnelle und genaue Berechnung von Strömungen. Ein Nachteil dieser Verfahren ist die aufwändige Gittergenerierung, die mehrere Wochen Arbeitszeit erfordern kann. Eine Alternative zu strukturierten Rechengittern bieten unstrukturierte Rechengitter, die wegen der beliebigen Form der Kontrollvolumina eine schnelle, automatische Gittergenerierung ermöglichen. Allerdings sind unstrukturierte Rechenverfahren noch nicht so ausgereift wie strukturierte Verfahren und der Einsatz unstrukturierter Verfahren im industriellen Umfeld hat erst begonnen. Aufgrund der umfangreichen Erfahrungen im Umgang mit strukturierten Rechenverfahren und ihrer weiten Verbreitung wird daher versucht, die Einschränkungen bei der Gittergenerierung durch geeignete Erweiterungen der genutzten strukturierten Strömungslöser zu verringern.

## 1.3 Flexibilisierung blockstrukturierter Verfahren durch die Chimären-Technik

Das Hauptproblem bei der Generierung strukturierter Gitter ist die Erzeugung einer geeigneten Netztopologie für eine gegebene Konfiguration. Eine weitere Erschwernis resultiert aus der Bedingung, dass bei den meisten verfügbaren Strömungslösern die Netzlinien an der Grenze zwischen zwei Blöcken eines Mehrblocknetzes kontinuierlich von einem Block in den benachbarten verlaufen müssen. Beide Schwierigkeiten können mit Hilfe der so genannten Chimären-Technik deutlich vereinfacht werden. Bei Nutzung dieser Technik stoßen zwei Netzblöcke nicht direkt aneinander, sondern überlappen sich gegenseitig. Auch können einzelne Netzknoten während der Rechnung ausgeblendet werden. Dies ist zum Beispiel erforderlich, sofern einige Netzknoten der sich überlappenden Gitter im Innern eines Körpers liegen. Der Datenaustausch zwischen den Netzblöcken während der Rechnung erfolgt durch Interpolationstechniken. Das in Bild 1.2 dargestellte Chimären-Netz für ein Flügelprofil mit Klappe demonstriert, dass die Rechengitter für die einzelnen Komponenten weitgehend unabhängig voneinander erzeugt werden können.

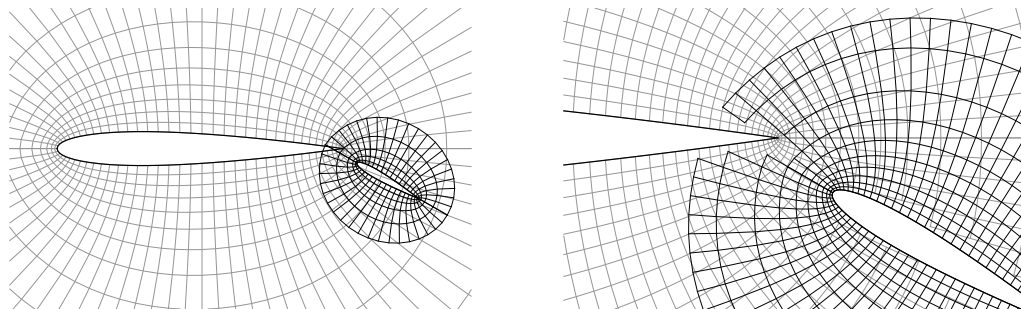


Bild 1.2: Beispiel eines Chimären-Netzes für ein Flügelprofil mit Klappe, links: vollständiges Netzsystem, rechts: Detailansicht der Netze ohne Darstellung der Punkte, die während der Strömungsberechnung ausgeblendet werden

In Bild 1.2 werden sich überlappende Netze verwendet, um räumlich voneinander getrennte Körper zu vernetzen. Die Chimären-Technik kann aber auch zur Vereinfachung der Netzgenerierung für Konfigurationen genutzt werden, die nur aus einem Körper bestehen. Hierfür wird die gegebene Geometrie in Komponenten aufgeteilt, die jeweils einzeln vernetzt werden. Beispielhaft ist in Bild 1.3 ein Netz für ein Flügelprofil mit ausgeschlagener Bremsklappe gezeigt.

Die Komponentengitter überdecken häufig nur die nähere Umgebung der Konfiguration. Sie werden in diesem Fall in ein Hintergrundgitter eingebettet, welches das Rechengebiet ausgehend von den Komponentengittern bis zur äußeren Berandung des Rechengebiets überdeckt, siehe Bild 1.4.

Bei den bislang genannten Beispielen dient die Chimären-Technik zur Vereinfachung der Netzgenerierung. Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Berechnung von instationären Strömungen um sich relativ zueinander bewegende Körper, zum Beispiel schnell bewegte Flügelklappen oder Rotor und Rumpf eines Hubschraubers. Sofern eine ausreichende Überlappung gewährleistet ist, kann die Position der Gitter beliebig

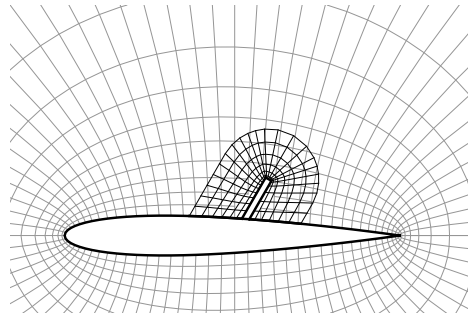


Bild 1.3: Chimären-Netz, bei dem die Komponenten Flügelprofil und Bremsklappe unabhängig voneinander vernetzt sind

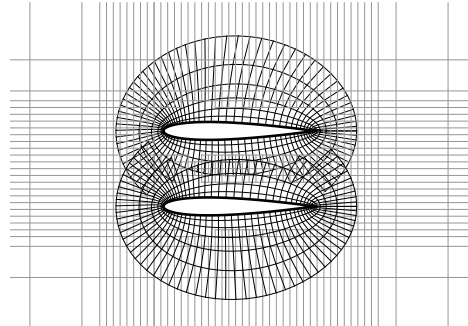


Bild 1.4: In ein Hintergrundnetz eingebettete Komponentennetze

im Raum variiert werden. Nach jeder Lageänderung müssen lediglich die auszublen-  
denden Netzpunkte sowie die Interpolationsvorschriften neu ermittelt werden. Als  
Beispiel für eine Anwendung mit Relativbewegung wird in Bild 1.5 ein Netzsystem  
für ein schwingendes Profil in einem Kanal gezeigt.

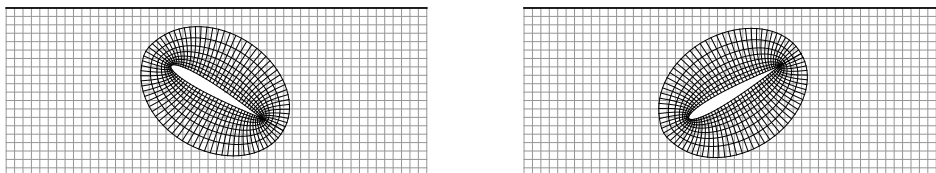


Bild 1.5: Anwendungsbeispiel für relativ zueinander bewegte Körper, dargestellt ist das  
Chimären-Netz für ein oszillierendes Flügelprofil in einem Kanal zu zwei verschiedenen Zeit-  
punkten

## 1.4 Stand der Technik

Die in Kapitel 1.3 beschriebene Chimären-Technik war bereits Gegenstand verschiede-  
ner Forschungsarbeiten. Eine Übersicht der verfügbaren Literatur wird in dem folgen-  
den Unterkapitel gegeben. Anschließend erfolgt eine Auflistung industriell eingesetz-  
ter CFD-Methoden, die überlappende Rechengitter verwenden können.

### 1.4.1 Nutzung der Chimären-Technik

Als Ausgangsbasis für die Entwicklung der Chimären-Technik gelten die Veröffentlichungen von Benek et al. [8] von 1983 sowie von Benek et al. [9] von 1985. In der erstgenannten Veröffentlichung werden die Euler-Gleichungen gelöst, um die zweidimensionale Strömung um ein Zweielement-Profil zu berechnen. In dem Aufsatz von 1985 demonstrieren die Autoren den Nutzen überlappender Netze zur Vereinfachung der Netzgenerierung, indem sie Flügel, Rumpf und Höhenleitwerk einer vereinfachten Flugzeugkonfiguration einzeln vernetzen und die Komponentengitter in ein separates Hintergrundnetz einbetten.

Der erste Schritt bei einer Rechnung auf überlappenden Gittern besteht darin, solche Punkte zu markieren, die während der Strömungsberechnung ausgeblendet werden müssen. Dieser Prozess wird auch „ein Loch schneiden“ genannt. Ein einfaches Vorgehen nutzt Meakin in ersten Arbeiten [60]. Er definiert mehrere analytische Körpergeometrien (z. B. Zylinder oder Ellipsoide), welche die reale Körperoberfläche einschließen. Durch analytische Formeln kann nun bestimmt werden, ob sich ein betrachteter Punkt innerhalb der Körpergeometrie befindet und somit auszublenden ist oder nicht. Dieses Verfahren zeichnet sich durch seine hohe Effizienz aus, ist aber bei komplexen Geometrien nur schwer anwendbar, vgl. Chiu und Meakin [27]. Benek et al. [9] und, mit verbessertem Algorithmus, Wey [114] suchen für jeden Netzknoten den dichtesten benachbarten Ort auf einer Körperoberfläche. Zeigt der Oberflächennormalenvektor an diesem Ort in Richtung des Netzknotens, befindet sich der Netzknoten außerhalb des Körpers, ansonsten innerhalb. Belk und Maple [7] testen die Kanten aller Netzzellen, ob sie die Oberfläche eines Körpers schneiden. Ist dies der Fall, werden die angrenzenden Netzknoten entsprechend als innerhalb bzw. außerhalb des Körpers befindlich markiert. Anschließend werden, ausgehend von den bereits markierten Punkten, rekursiv alle Netzknoten als innerhalb oder außerhalb des Körpers klassifiziert. Zur Beschleunigung des Verfahrens werden die Oberflächendaten des Körpers in einer „Polygonal Mapping Tree“-Datenstruktur gespeichert, siehe auch Prewitt et al. [80]. Chiu und Meakin [27] verwenden für die Lochdefinition eine approximierte Darstellung des Körpers („hole map“). Dazu wird dem Körper ein kartesisches Hilfsgitter überlagert, von dem alle Zellen markiert werden, die ganz oder teilweise im Innern der Geometrie liegen. Die anschließende Prüfung aller Netzknoten, ob sie innerhalb des Körpers liegen, erfolgt sehr schnell, da auf die Zellen des kartesischen Hilfsgitters ohne Suchaufwand zugegriffen werden kann. Nachteil dieser Methode ist der hohe Speicheraufwand, da für komplexe Körpergeometrien eine feine Auflösung des kartesischen Gitters erforderlich ist. Petersson [77] nutzt eine Strahlenverfolgungsmethode zur Identifizierung von Punkten, die sich innerhalb eines Körpers befinden. Dazu wird vom betrachteten Punkt ein Strahl ausgesendet, und die Zahl der Durchstoßpunkte durch die Körperoberflächen wird ermittelt. Bei einer geraden Anzahl befindet sich der Punkt außerhalb des Körpers, ansonsten innerhalb. Zur Beschleunigung des Verfahrens sendet Meakin [66] lediglich parallele Strahlen von den Knotenpunkten eines ebenen, zweidimensionalen, kartesischen Hilfsgitters aus und speichert die Koordinaten ihrer Durchstoßpunkte mit der Körperoberfläche („object X-ray“). Um für einen gegebenen Punkt zu bestimmen, ob er innerhalb oder außerhalb des Körpers liegt, wird der Punkt parallel zu den Strahlen auf das Hilfsgitter projiziert und die dort gespeicherten Daten für die Durchstoßpunkte werden mit den tatsächlichen Koordinaten des

Punktes verglichen. Ein Nachteil aller Lochschneidealgorithmen, welche die tatsächliche Oberflächengeometrie benutzen, ist der deutlich höhere Zeitbedarf im Vergleich zu analytisch definierten Lochgeometrien, vgl. Meakin [66].

Nach dem Ausblenden der innerhalb eines Körpers befindlichen Netzknoten können für alle Netzknoten sinnvolle Strömungsdaten berechnet werden. Die Gitter haben eine maximale Überlappungsbreite, da sie bis an die Oberfläche anderer Komponenten reichen. Bei einigen Strömungslösern werden nun zusätzliche Zellen ausgeblendet, um die Überlappungsbreite zu minimieren. Durch diesen Vorgang entfernen sich die Lochränder von den Körperoberflächen. Dies wirkt sich günstig auf die spätere Interpolation von Strömungsgrößen an den Lochrändern aus, da im Allgemeinen die Strömungsgradienten mit zunehmendem Abstand von Körperoberflächen geringer werden und somit auch die Interpolationsfehler abnehmen. Weiterhin wird verhindert, dass auf den sich überlappenden Gittern eine unterschiedliche Strömung berechnet wird, z. B. aufgrund der unterschiedlichen Feinheit der Netze. Zur Überlappungsminimierung schlagen Wey [114] bzw. Chiu und Meakin [27] ein Verfahren vor, bei dem das verbleibende Überlappungsgebiet möglichst viele Netzzellen von Körperoberflächen entfernt ist. Suhs et al. [103] blenden grobe Netzzellen aus, die von feinen Zellen überlappt werden. Dadurch bleiben feine Netzbereiche erhalten und die Zellgröße in den verbleibenden Überlappungsbereichen ist ähnlich. Dies wirkt sich günstig auf die Interpolations- und Rechengenauigkeit aus. Der Nachteil einer Überlappungsminimierung ist der zusätzliche Zeitbedarf.

Bei der Chimären-Technik werden die Daten durch Interpolationstechniken zwischen den Rechengittern ausgetauscht. Um für eine gegebene Empfängerzelle die Interpolationskoeffizienten berechnen zu können, müssen zunächst die überlappenden Gitter nach einer geeigneten Spenderzelle durchsucht werden. Da dieser Prozess gegebenenfalls für sehr viele Zellen durchgeführt werden muss, hat die Auswahl des Suchverfahrens einen entscheidenden Einfluss auf die Effizienz des gesamten Chimären-Verfahrens. Benek et al. [8] benutzen einen einfach zu implementierenden Sprungalgorithmus („stencil walk“ oder „gradient search“). Ausgehend von einer Startzelle im Spendernetz wird iterativ von einer Zelle zu einer Nachbarzelle gesprungen, um den Abstand zwischen der Zelle und den Koordinaten der Empfängerzelle zu minimieren. Dieser Algorithmus kann jedoch versagen, beispielsweise falls der Suchpfad auf einen konkaven Körper trifft. Um den Algorithmus zu beschleunigen und seine Robustheit zu steigern, überlagern Chiu und Meakin [27] dem Rechengitter ein kartesisches Hilfsgitter und speichern für jeden Knotenpunkt des Hilfsgitters die Indizes der sie einschließenden Zelle des Rechnernetzes („inverse map“). Während des sich anschließenden Suchprozesses kann mit den bekannten Koordinaten eines Empfängerpunkts und den in den benachbarten Knoten des kartesischen Gitters gespeicherten Zellindizes ein Startpunkt und Suchbereich für einen Sprungalgorithmus zur genauen Lokalisierung einer Spenderzelle definiert werden. Eine Variante der „inverse map“ nutzen Le Pape et al. [57]. Sie speichern für jede Zelle des kartesischen Hilfsgitters die Indizes aller von ihr überdeckten Zellen des Rechengitters. Zum Finden einer geeigneten Spenderzelle wird zunächst die den Empfängerpunkt einschließende Zelle des Hilfsgitters ermittelt. Anschließend erfolgt die Prüfung der dort gespeicherten Zellen des Rechengitters. Zur Minimierung der Rechenzeit kann das Hilfsgitter lokal verfeinert werden, so dass pro Hilfszelle nur wenige Zellen des Rechengitters gespeichert sind. Beim „Alternating Digital Tree“-Suchalgorithmus (ADT) von Bonet und Peraire [17] werden die Zellko-



ordinaten in einer baumartigen Datenstruktur gespeichert, die ein schnelles Auffinden möglicher Spenderzellen erlaubt. Eine vergleichende Zusammenstellung der genannten und weiterer, für Chimären-Anwendungen selten genutzter Suchalgorithmen gibt Löhner [59].

Nach dem Bestimmen einer Spenderzelle können die Koeffizienten für die Interpolationsvorschrift berechnet werden. Die erforderliche Genauigkeit der Interpolation kann nach Chesshire und Henschaw [26] ermittelt werden. Sie hängt von der Ordnung der zu lösenden Differentialgleichung, der Genauigkeit ihrer Diskretisierung und dem Verhalten der Überlappungsweite bei Netzverfeinerungen ab.

Die Überlappung von zwei Gittern auf einer Körperoberfläche stellt weitere Anforderungen an den Interpolationsalgorithmus, da in den beiden Gittern die diskretisierten Darstellungen der Oberfläche im Allgemeinen nicht identisch sind. Dies kann zur Berechnung von fehlerhaften Interpolationskoeffizienten führen, so dass Korrekturmethode erforderlich sind. Noak und Belk [71] geben eine Abbildungsvorschrift an, mit der die geraden Netzlinien des Rechengitters in entsprechend der Körperoberfläche gekrümmte Linien transformiert werden. Da die Oberflächendarstellung in den überlappenden Gittern nun identisch ist, können die Interpolationskoeffizienten richtig berechnet werden. Das Verfahren erfordert die genaue Kenntnis der Form der Körperoberfläche, die zum Zeitpunkt der Rechnung jedoch häufig nicht als CAD-Geometrie oder in ähnlicher Form verfügbar ist. Parks et al. [76] projizieren die Wandkoordinaten des Empfängernetzes auf die diskretisierte Oberflächendarstellung im Spendernetz und verschieben die Netzkoordinaten des Empfängernetzes in der Nähe der Wand entsprechend. Da die Rechengitter nun aber nicht mehr der originalen Oberfläche entsprechen, machen Suhs et al. [103] die Verschiebung der Netzkoordinaten nach der Berechnung der Interpolationskoeffizienten wieder rückgängig, so dass die Strömungsberechnung auf den Ursprungsgittern durchgeführt wird.

Die fehlerfreie Berechnung der Interpolationskoeffizienten erfordert eine ausreichende Überlappung der Netze. Sie beträgt bei einem Strömungslöser mit zweiter Ordnung Rechengenauigkeit mindestens vier Netzzellen. Ist die Überlappungsweite kleiner, muss sie durch Verbesserung der Netze erhöht werden. Alternativ kann die benötigte Überlappungsweite um eine Zellbreite verringert werden, indem eine implizite Interpolationsvorschrift verwendet wird, siehe Chesshire und Henschaw [26] oder Jeanfaivre et al. [48]. Der Algorithmus erfordert das Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems, wodurch der Implementierungsaufwand insbesondere für parallele Rechnungen erhöht wird.

Bei komplexen Netzsystemen kann es sich als sehr zeitaufwändig erweisen, durch Anpassung der Netze für alle Empfängerpunkte eine ausreichende Überlappung sicherzustellen. Daher ermöglichen Steger und Benek [102] und Jeanfaivre et al. [48] auch eine Extrapolation der Strömungswerte aus dem Spendergitter. Suhs et al. [103] mitteilen dagegen die Strömungsgrößen aus benachbarten Zellen des Empfängergitters. Die beschriebenen Vorgehensweisen reduzieren die Genauigkeit der Strömungslösung, so dass die Zahl der nichtinterpolierbaren Empfängerzellen klein sein sollte.

Die bislang beschriebenen Interpolationstechniken sind nicht flusskonservativ, d. h. der Erhalt von Masse, Impuls und Energie ist nicht gewährleistet. Der resultierende Fehler ist bei Flugzeugumströmungen gering, sofern die Netzfeinheit der sich überlappenden Gitter ähnlich ist und Daten nicht in Gebieten mit starken Strömungsgra-

dienten, wie insbesondere Verdichtungsstößen, interpoliert werden, vgl. Meakin [62] und Wang [109, 112]. Um ein flusskonservatives Chimären-Verfahren für zweidimensionale Strömungen zu erhalten, integrieren Moon und Liou [70] die Strömungsvariablen im Spendernetz über ein Volumen, welches der Geometrie der Empfängerzelle entspricht. Wang [109] und Cali und Couaillier [19] entfernen die Überlappung und ersetzen sie durch einen Blockübergang mit hängenden Netzknoten. Die Zellen an der Trennfläche zwischen den Blöcken können dabei eine irreguläre Form annehmen. Die Erweiterung des Verfahrens von Wang für dreidimensionale Strömungen beschreiben Wang et al. [111] bzw. Hariharan et al. [39]. Die Autoren weisen aber auch auf den hohen Implementierungsaufwand hin, der durch die Berücksichtigung vieler Sonderfälle bei der Ermittlung der Zellformen an der Trennfläche entsteht. Einen anderen Weg beschreiben Liou und Kao [58] und Zheng und Liou [119]. Sie entfernen sämtliche Netzzellen der Überlappung und füllen den entstehenden Spalt mit einem unstrukturierten Tetraedergitter. Dies erfordert einen Strömungslöser, der sowohl auf strukturierten Rechengittern als auch auf unstrukturierten Rechengittern Strömungen berechnen kann.

Strömungssimulationen stellen hohe Anforderungen an die Rechenleistung der genutzten Computer. Daher werden oft Parallelrechner eingesetzt. Beispielsweise verwendet Taft [104] 512 Prozessoren für eine Strömungssimulation. Parallele Rechnungen erfordern eine Parallelisierung genannte Anpassung des Strömungslösers, die bei einem Chimären-Verfahren zusätzlich auch für die Lochschneideverfahren und Suchalgorithmen durchzuführen ist. Eine solche Implementierung beschreiben Barszcz et al. [4] und Smith und Pallis [99]. Die Autoren nehmen die Aufteilung des Rechengitters auf die Prozessoren so vor, dass während der Lösung der Strömungsgleichungen die Lastverteilung („load balancing“) auf allen Prozessoren gleich ist. Dies kann jedoch dazu führen, dass die Lastaufteilung beim Ausführen der Chimären-Algorithmen nicht optimal ist, da deren Ausführungszeit von der Zahl der auszublendenden Zellen und der Anzahl der Spenderzellen pro Prozessor abhängt. Wissink und Meakin [117] berücksichtigen daher bei der Lastverteilung auch die Ausführungszeit der Chimären-Algorithmen, wodurch jedoch die Lastverteilung bei der Strömungsberechnung nicht mehr optimal ist. Prewitt et al. [80] nehmen schließlich die Lastverteilung für Lochschneidealgorithmus, Suchalgorithmus und Strömungsberechnung getrennt vor, so dass jeder Prozess mit der optimalen Geschwindigkeit abläuft. Eine abweichende Strategie verfolgen Suhs et al. [103], die keinen besonderen Algorithmus zur Optimierung der Lastverteilung benutzen. Stattdessen werden die anfallenden Aufgaben in zuvor nicht festgelegter Reihenfolge einem gerade ungenutzten Prozessor zugeteilt. Dadurch ergibt sich automatisch eine gute Lastverteilung auch bei unterschiedlich schnellen Prozessoren.

Die Auswertung der Ergebnisse von Chimären-Rechnungen erfordert keine zusätzlichen Anpassungen des Strömungslösers. Eine Ausnahme bildet die Berechnung von Kräften und Momenten, sofern Netzüberlappungen auf Körperoberflächen existieren. Da üblicherweise die Kräfte über alle vorhandenen Oberflächen integriert werden, tragen die Kraftanteile der Oberflächen in den Überlappungsgebieten doppelt zur resultierenden Gesamtkraft bei. Als Ausweg blenden Chan und Buning [21] zusätzliche Zellen des Oberflächennetzes aus, bis keine Überlappung mehr existiert. Der resultierende Spalt wird mit einem Dreiecksgitter gefüllt. Die nun einfach geschlossene Oberfläche dient zur richtigen Berechnung der Kräfte und Momente. Die Strömungsberechnung

selbst nutzt weiterhin das ursprüngliche überlappende Netz.

Rechengitter für Chimären-Rechnungen können mit allen verfügbaren Netzgeneratoren erzeugt werden. Einen speziell für Chimären-Anwendungen entwickelten Netzgenerator beschreibt Chan [23]. Richtlinien für die Erzeugung von Chimären-Netzen werden von Chan et al. [24] angegeben.

Die Chimären-Technik in Verbindung mit dem Komponentenansatz vereinfacht die Netzgenerierung deutlich. Es zeigt sich jedoch, dass die Erzeugung eines geeigneten Hintergrundgitters schwierig ist. Häufig wird ein einfaches, aus nur einem Netzblock bestehendes, kartesisches Hintergrundgitter genutzt. Bei komplexen Körpergeometrien erfordert ein solches Netz allerdings sehr viele Netzknoten. Alternativ können mehrere sich gegenseitig überlappende kartesische Gitter als Hintergrundnetz generiert werden oder auch ein krummliniges, an die Form der Komponentengitter angepasstes Mehrblockgitter. Diese Vorgehensweisen erfordern jedoch einen erhöhten Aufwand. Als Ausweg bietet sich die automatische Generierung des Hintergrundgitters an. Meakin [63, 65] gruppiert kleine, sich gegenseitig überlappende kartesische Gitter mit würfelförmigen Zellen gleicher Größe um die Komponentennetze herum. Diese werden mit immer größeren Schichten kartesischer Gitter umschlossen, bis das gesamte Rechengebiet überdeckt ist. Das von Meakin vorgeschlagene Verfahren für die automatische Netzgenerierung ist sehr speicheraufwändig und erlaubt zudem keine Adaption der Zellen der kartesischen Hintergrundgitter an die Zellgröße in den Nahfeldgittern. Ein ähnliches Vorgehen nutzen Blaylock et al. [14]. Anstelle von sich überlappenden Netzen verwenden sie nichtüberlappende Netze mit hängenden Netzknoten. Die hängenden Netzknoten entstehen dabei am Übergang eines feinen Gitters zu einem gröberen durch die an den Blockgrenzen endenden Netzlinien des feineren Gitters. Die würfelförmigen Zellen der von Blaylock et al. erzeugten Hintergrundgitter werden der Feinheit der Komponentengitter angepasst. Gegenüber Netzen mit Überlappung werden bei dieser Vorgehensweise weniger Netzzellen benötigt. Weiterhin kann die Flusskonservativität an den Blockübergängen gewährleistet werden.

Mit Hilfe der Chimären-Technik können Rechengitter auf einfache Weise an die Strömungslösung adaptiert werden, indem feine Netze den groben beliebig überlagert werden. Solche Gittersysteme mit manuell platzierten feinen Netzen werden beispielsweise von Kao et al. [52] und Smith et al. [98] genutzt. Eine automatische Generierung feiner Gitter beliebiger Form ist nur von Benoit [10] für zweidimensionale Strömungen bekannt. Chawla [25] nutzt automatisch platzierte kartesische Gitter zur Adaption einer instationären zweidimensionalen Strömung. Die Genauigkeit einer dreidimensionalen Strömungsberechnung steigert Meakin [64] durch Verfeinerung einzelner Blöcke eines Hintergrundnetzsystems aus vielen sich gegenseitig überlappenden Netzblöcken.

Welche Zeiteinsparung sich durch konsequenten Einsatz der Chimären-Technik erreichen lässt, zeigt die Arbeit von Rogers et al. [89]. Den Autoren gelang es, in 48 Arbeitstagen ein Netz für eine vollständige Boeing 777-200 in Landekonfiguration zu generieren sowie die Strömung zu berechnen und die Ergebnisse auszuwerten. Ohne Einsatz der Chimären-Technik wäre eine solche Simulation mit strukturierten Rechenverfahren kaum möglich gewesen.

### 1.4.2 Industriell eingesetzte Chimären-Verfahren

Im Folgenden wird eine Zusammenstellung von in der Luftfahrtindustrie genutzten Strömungslösern für strukturierte Rechengitter gegeben, mit denen eine Strömung auf überlappenden Gittern berechnet werden kann. Es wird sich zeigen, dass deutliche Unterschiede hinsichtlich der implementierten Algorithmen bestehen und immer nur ein Teil der in Kapitel 1.4.1 beschriebenen Techniken verfügbar ist.

Der bekannteste Strömungslöser für Chimären-Anwendungen ist OVERFLOW [49, 22]. Die erforderlichen Chimären-Daten wie Lochdaten und Interpolationskoeffizienten werden von den Programmen PEGASUS 5 [103] oder DCF3D [27, 66] bereitgestellt. Ergänzend ist ein spezieller Netzgenerator OVERGRID [23] verfügbar. Alle Programme wurden von der NASA (USA) entwickelt. Als besondere Eigenschaft erlaubt OVERFLOW keine konventionellen Blockübergänge, stattdessen müssen sich alle Netzblöcke überlappen. Der Datentransfer an Chimären-Rändern kann neben der nichtflusskonservativen Interpolation auch mit einem flusskonservativen Vorgehen erfolgen [39]. Das Chimären-Verfahren PEGASUS 5 nutzt eine „hole map“ zur schnellen Bestimmung, ob sich ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Körpers befindet. Gegebenenfalls wird zur präzisen Bestimmung des Lochrandes zusätzlich ein modifiziertes Strahlverfolgungsverfahren genutzt. Im Anschluss an das Schneiden des Lochs kann die Überlappungsbreite minimiert werden, indem im Überlappungsbereich jeweils die größeren Gitterzellen ausgeblendet werden. Die Suche nach einer geeigneten Spenderzelle erfolgt mit einem ADT-Verfahren, wobei eine der gefundenen Zellen als Startpunkt für einen Sprungalgorithmus dient. Ein Projektionsalgorithmus zur richtigen Berechnung der Interpolationskoeffizienten bei sich überlappenden Netzen auf Körperoberflächen ist ebenfalls implementiert. DCF3D nutzt „Object X-Rays“ als Lochschneidealgorithmus. Mit einer nachfolgenden Überlappungsminimierung werden weitere Gitterbereiche ausgeblendet, so dass die Dateninterpolation möglichst weit von Körperoberflächen entfernt erfolgt. Spenderzellen werden mit einer „inverse map“ mit anschließendem Sprungalgorithmus identifiziert. DCF3D erlaubt weiterhin die automatische Generierung von Hintergrundnetzen mit der von Meakin [64] beschriebenen Methode. Gegebenenfalls kann ein Hintergrundgitter an eine Strömungslösung adaptiert werden. Mit OVERFLOW wurden viele sehr umfangreiche Strömungssimulationen durchgeführt, darunter Berechnungen für Transportflugzeuge [89], das Space Shuttle [97] sowie den Vorwärtsflug und Schwebeflug des Tiltrotor-Hubschraubers V-22 Osprey [61, 78]. Das OVERFLOW Programmpaket wird auch bei Boeing Commercial Airplanes eingesetzt.

Beim Strömungslöser Beggar [80] dient eine „Polygonal Mapping Tree“-Datenstruktur zur Identifizierung von Löchern im Rechengitter. Bei der Suche nach einer Spenderzelle wird ebenfalls die „Polygonal Mapping Tree“-Datenstruktur genutzt, um einen guten Ausgangspunkt für einen Sprungalgorithmus zu finden. Beggar wird von der US Air Force entwickelt und dient vorwiegend zur Berechnung der instationären Strömung beim Abgang von Lasten von einem Flugzeug [79].

Der kommerziell vertriebene Strömungslöser CFD-FASTRAN der CFD Research Corporation (USA) [88, 113] erlaubt für Chimären-Rechnungen eine automatische Lochdefinition entsprechend Belk und Maple [7]. Gegebenenfalls kann eine Überlappungsminimierung angeschlossen werden. Die Suche nach einer Spenderzelle erfolgt mit ei-

nem ADT-Verfahren. Der Datentransfer an Chimären-Rändern kann flusskonservativ durchgeführt werden, wobei auch strukturierte und unstrukturierte Gitter gleichzeitig genutzt werden können [110]. Aus der Literatur sind lediglich Anwendungen für reibungslose Chimären-Rechnungen bekannt, z. B. der Abschuss eines Schleudersitzes aus einem Kampfflugzeug [88].

Der Strömungslöser elsA [20] vom französischen Forschungsinstitut ONERA erlaubt ebenfalls die Nutzung der Chimären-Technik [11, 48]. Für die Lochdefinition wird ein Körper in einen oder mehrere Quader eingeschlossen und in die innerhalb der Quader befindlichen Zellen überlappende Gitter ausgeblendet [12]. Alternativ kann auch ein Verfahren nach Benek et al. [9] genutzt werden. Die Suche nach Spenderzellen erfolgt entweder mit einer „inverse map“ nach Le Pape et al. [57] oder mit einem ADT-Suchbaum. Mit elsA können entsprechend des Vorgehens von Meakin [64] automatisch sich überlappende kartesische Hintergrundnetze erstellt werden, die anhand der Strömungslösung adaptiert werden können. Bisher gezeigte Chimären-Anwendungen beinhalten reibungslose Strömungsberechnungen für Hubschrauber-Rotorblätter mit automatisch generierten und adaptierten Hintergrundgittern [11] sowie reibungsbehaftete Berechnungen von Hubschrauber-Rumpfströmungen, wobei die Wirkung des Rotors mit einer Wirkscheibe modelliert wurde [84]. Industriell genutzt wird elsA unter anderem von EADS Airbus Frankreich.

Das CFD-Verfahren FLOWer [53, 56] wird vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt entwickelt und wird unter anderem bei Airbus Deutschland [3] und Eurocopter Deutschland [29, 30] eingesetzt. FLOWer bildet die Ausgangsbasis für die in dieser Arbeit vorgestellten Entwicklungen. Um die erzielten Fortschritte zu verdeutlichen, werden nachfolgend die zu Beginn der Arbeit verfügbaren Algorithmen für Rechnungen auf überlappenden Gittern vorgestellt:

Das in FLOWer verfügbare Chimären-Verfahren wurde von Heinrich [40] implementiert. Es basiert auf Arbeiten von Pahlke [73, 74, 75] für einen Euler-Strömungslöser, welcher mit den Erweiterungen von Schwarz [94] für beliebige Chimären-Netzsysteme genutzt werden kann. Die Lochdefinition in FLOWer erfolgte mit analytischen Körpergeometrien oder mit Hilfsgittern, deren Zellen alle überdeckten Netzknoten ausblenden. Als Suchalgorithmus diente ein Sprungverfahren. Berechnungen reibungsbehafteter Strömungen auf Gittersystemen mit Netzüberlappung auf Körperoberflächen konnten nicht durchgeführt werden, da ein Korrekturverfahren für die Interpolationskoeffizienten nicht verfügbar war. Die Erstellung der Hintergrundgitter erfolgte manuell.

## 1.5 Ziel der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Berechnung der reibungsbehafteten Strömung um komplexe Konfigurationen entwickelt und validiert. Das Verfahren verwendet für Strömungsberechnungen überlappende Komponentengitter, die in ein kartesisches Hintergrundgitter eingebettet sind. Das Hintergrundgitter besteht aus einem automatisiert erstelltem Mehrblockgitter mit hängenden Netzknoten, bei dem die Feinheit der Netzblöcke an die Zellgröße der Komponentengitter adaptiert ist, siehe Bild 1.6. Als in der Literatur nicht bekannte Eigenschaft können in dem Hintergrund-

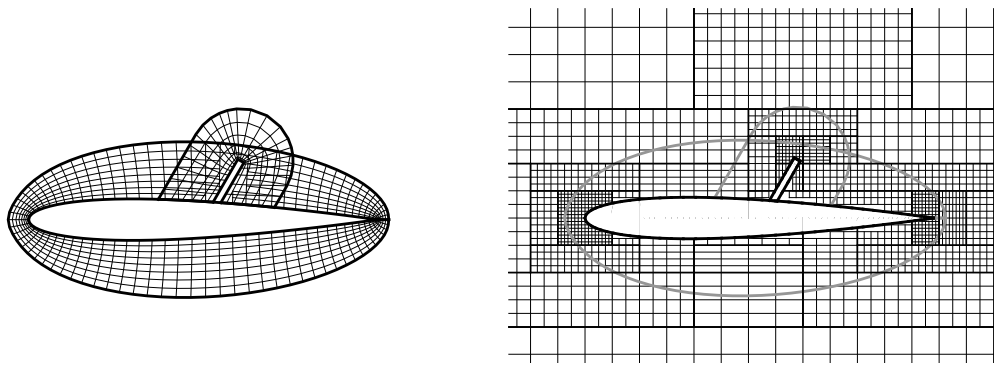


Bild 1.6: Beispiel eines Rechengitters für den entwickelten Strömungslöser, links: Komponentengitter für Flügelprofil und Bremsklappe, rechts: automatisiert erzeugtes Hintergrundgitter mit hängenden Netzknoten und quaderförmigen Zellen im Bereich des Profils

gitter nicht nur würfelförmige, sondern auch quaderförmige Zellen auftreten. Dadurch hat das Hintergrundgitter eine verbesserte Ähnlichkeit mit den Komponentengittern, wodurch Fehler bei der Dateninterpolation abnehmen. Weiterhin sinkt die Zahl der erforderlichen Gitterzellen und das Sicherstellen einer ausreichenden Netzüberlappung bei der Gittergenerierung vereinfacht sich. Die intensive Nutzung der überlappenden Gitter senkt den Aufwand bei der Netzgenerierung für komplexe Körpergeometrien deutlich im Vergleich zu der Erzeugung konventioneller Mehrblockgitter.

Das entwickelte Verfahren basiert auf dem vorhandenen blockstrukturierten Strömungslöser FLOWer. Die bereits in FLOWer implementierten Chimären-Algorithmen werden im Rahmen dieser Arbeit wesentlich weiterentwickelt. Als wichtigster Beitrag werden die Voraussetzungen für Strömungssimulationen auf Gittersystemen mit Netzüberlappungen auf Körperoberflächen geschaffen. Zu diesem Zweck wird eine Methode zur genauen Berechnung der Interpolationskoeffizienten in Wandnähe implementiert sowie ein Verfahren zur Bestimmung integraler Oberflächenkräfte entwickelt. Verschiedene Schritte beider Verfahren wurden bislang nicht in der Literatur veröffentlicht. Eine weitere wichtige Ergänzung des Ausgangsverfahrens ist die Parallelisierung der zunächst nur für sequentielle Rechnungen verfügbaren Chimären-Algorithmen.

Die kartesischen Hintergrundgitter werden mit einem automatisiert ablaufenden Netzgenerator erstellt. Dieser nutzt ein neuartiges Adoptionsverfahren, da die in der Literatur bekannten Methoden ausschließlich für die Erzeugung von Gittern mit würfelförmigen Zellen geeignet sind. Für die numerische Behandlung der hängenden Netzknoten wird eine flusskonservative Randbedingung in den Strömungslöser implementiert.

Bei der Entwicklung der neuen Techniken muss berücksichtigt werden, dass FLOWer eine industriell genutzte CFD-Methode mit breitem Anwendungsbereich ist. Der Gültigkeitsbereich der ausgewählten Algorithmen darf somit nicht auf spezielle Anwendungen beschränkt sein. Demzufolge müssen Rechnungen in Kombination mit sämtlichen anderen bereits im Strömungslöser verfügbaren Techniken, beispielsweise Turbulenzmodellierung und Mehrgitterbeschleunigung, möglich sein. Es ist ein robustes Verhalten der Verfahren erforderlich, so dass gültige Ergebnisse auch bei unzureichenden Eingabedaten erzielt werden, wie beispielsweise Rechengittern schlechter

Qualität. Für Anwender ohne Spezialkenntnisse ist weiterhin die einfache Bedienung aller Verfahren wichtig.

Ein wichtiges Anwendungsfeld der Chimären-Technik bilden instationäre Strömungssimulationen. Daher werden bei der Entwicklung und Darstellung der Algorithmen die besonderen Anforderungen bei Rechnungen auf bewegten Gittersystemen berücksichtigt. In diesem Zusammenhang wird erstmals die notwendige Berücksichtigung der Lochbewegung bei der Definition der Interpolationspunkte beschrieben. Im Unterschied zur Ausgangsversion des Strömungslösers erfolgt die Entwicklung aller Methoden für eine zellzentrierte Diskretisierung der Strömungsgleichungen, da diese sich bei vielen Anwendungsfällen als deutlich robuster gegenüber der ursprünglich genutzten Zelleckpunkt-Diskretisierung erwiesen hat. Aufgrund des beschränkten Zeitrahmens wird auf die Implementierung eines automatischen Lochschneidealgorithmus, einer Überlappungsminimierung und eines flusskonservativen Datentransfers verzichtet. Diese Techniken sind für ein Chimären-Verfahren nicht von wesentlicher Bedeutung und würden außerdem bei instationären Anwendungen zu einer deutlichen Zunahme der Rechenzeit führen.

Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist die Verifikation und Validierung der neu entwickelten Verfahren. Die Betrachtungen schließen auch die bereits in FLOWer vorhandenen Chimären-Algorithmen ein, da nur wenige detaillierte Untersuchungen über ihre Anwendung vorliegen. Zur Verifikation dienen Netzkonzvergenzstudien für eine reibungslose Profilumströmung und die reibungsbehaftete Umströmung eines Dreielement-Hochauftriebsprofils. Die Rechnungen ermöglichen den Nachweis der Korrektheit der Implementierung und die Bestimmung der Verfahrensgenauigkeit. Die Validierung erfolgt am Beispiel von drei verschiedenen Konfigurationen mit steigender Komplexität: Nach der Berechnung des Kennfelds für ein Dreielement-Hochauftriebsprofil erfolgt eine Untersuchung zur Abhängigkeit des Widerstands eines Hubschrauberrumpf-Windkanalmodells von der Reynolds-Zahl. An diese schließt sich die Ermittlung der Kennlinien für eine Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration an. Alle Ergebnisse werden mit experimentellen Messungen und mit Strömungssimulationen auf konventionellen Rechengittern verglichen. Bei der Bewertung der Flexibilisierungstechniken werden neben der Lösungsgenauigkeit auch die Vereinfachungen bei der Netzgenerierung diskutiert. Ein weiteres Kriterium ist die Rechengeschwindigkeit des Strömungslösers auf den verschiedenen Gittertypen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 wird zunächst beschrieben, welche numerischen Methoden in FLOWer für Strömungsberechnungen genutzt werden. Die im Rahmen der Arbeit durchgeführten Erweiterungen der Chimären-Technik werden in Kapitel 3 dargestellt. Anschließend wird in Kapitel 4 die automatische Generierung kartesischer Hintergrundgitter sowie die numerische Behandlung der hängenden Netzknoten erläutert. Die Vorstellung der Ergebnisse der Verifikations- und Validierungsrechnungen erfolgt in Kapitel 5. In Kapitel 6 werden die erzielten Ergebnisse zusammengefasst.





## 2 Berechnung von instationären, reibungsbehafteten Strömungen

### 2.1 Grundgleichungen

Die kompressible, reibungsbehaftete Strömung eines als Kontinuum angenommenen Fluids wird durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Das zum Beispiel von Blazek [15] hergeleitete Gleichungssystem beschreibt den Erhalt von Masse, Impuls und Energie in der Strömung. Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ist häufig aufgrund der kleinskaligen Fluktuationen der Strömungsgrößen in turbulenten Strömungsbereichen nicht möglich. Als Ausweg kann eine zeitliche Mittelung der Strömungsgrößen nach Reynolds bzw. Favre vorgenommen werden. Das beispielsweise von Blazek [15] oder Einfeld [34] beschriebene Vorgehen führt auf die so genannten Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen. Diese sind auch für instationäre Strömungen gültig, sofern zwischen dem Frequenzbereich der turbulenten Fluktuationen und den niederfrequenten Bewegungen der instationären Strömung eine ausreichende spektrale Lücke besteht. Der durch die zeitliche Mittelung zusätzlich in die Navier-Stokes-Gleichungen eingeführte Reynolds-Spannungstensor kann mit Hilfe des Wirbelviskositätsansatzes von Boussinesq vereinfacht werden (vgl. Blazek [15]). Der Ansatz stellt in Analogie zu den Reibspannungen in einer laminaren Strömung einen linearen Zusammenhang zwischen den Reynolds-Spannungen und den Geschwindigkeitsgradienten her. Der als Wirbelviskosität bezeichnete Proportionalitätsfaktor muss mit einem Turbulenzmodell bestimmt werden.

#### 2.1.1 Grundgleichungen der Hauptströmung

Für die Analyse einer Strömung um einen sich bewegenden Körper ist es zweckmäßig, die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen in ein mit dem Körper mitbewegtes Koordinatensystem zu transformieren. Dies erleichtert die Vorgabe von Randbedingungen.

Die Beziehung zwischen dem Inertialsystem, dem körperfesten Koordinatensystem und einem Fluidelement ist, wie in Bild 2.1 dargestellt, durch

$$\vec{r}_k = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad (2.1)$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $\vec{r}_k$  den Ortsvektor vom Ursprung des körperfesten Systems zu dem Fluidelement  $F$ ,  $\vec{r}$  den Vektor vom Ursprung des Inertialsystems zu  $F$  und  $\vec{r}_0$

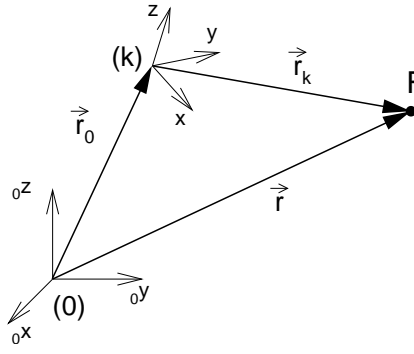


Bild 2.1: Position eines Fluidelements  $F$  bezogen auf Inertialsystem (0) bzw. körperfestes System ( $k$ )

die Verschiebung des körperfesten Systems gegenüber dem Inertialsystem. Alle Vektoren seien in Koordinaten des körperfesten Systems gegeben. Durch zeitliches Differenzieren von Gl. (2.1) folgt für die Geschwindigkeit des Fluidteilchens  $\vec{q}_k$  bezogen auf den Ursprung des körperfesten Systems

$$\vec{q}_k = \vec{q} - \vec{q}_b \quad (2.2)$$

mit

$$\vec{q}_b = \vec{q}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_k \quad (2.3)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{q}$  die Absolutgeschwindigkeit des Teilchens und  $\vec{q}_b$  den Geschwindigkeitsanteil aufgrund der Bewegung des körperfesten Systems gegenüber dem Inertialsystem. Der Geschwindigkeitsanteil  $\vec{q}_b$  resultiert aus einer translatorischen Bewegung  $\vec{q}_0$  und einer Rotation mit der Drehgeschwindigkeit  $\vec{\Omega} = [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]$ . Eine ausführliche Herleitung von Transformationsbeziehungen wird in Anhang A gegeben, wobei Gl. (2.2) der Darstellung Gl. (A.22) entspricht.

Unter Ausnutzung der in Gl. (2.2) vorgenommenen Aufteilung der Geschwindigkeit können die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen aus einem ruhenden System in ein bewegtes Koordinatensystem transformiert werden. Die zur Transformation erforderlichen Schritte werden z. B. von Schöll [93] angegeben, mit der Beschränkung auf reibungslose Strömungen auch von Kroll [55] oder Pahlke [75]. Das resultierende Gleichungssystem lautet

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{W} dV + \oint_{\partial V} (\vec{F} - \vec{W} \cdot \vec{q}_b) \cdot \vec{n} dS + \int_V \vec{G} dV = 0 \quad (2.4)$$

Es besteht aus fünf Gleichungen, von denen die erste die Massenerhaltung, die zweite bis vierte die Impulserhaltung und die letzte die Energieerhaltung beschreiben. In dem Vektor der konservativen Variablen  $\vec{W}$

$$\vec{W} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]^T \quad (2.5)$$

sind die abhängigen Strömungsgrößen Dichte  $\rho$ , Komponenten der Absolutgeschwindigkeit  $[u, v, w] = \vec{q}$  und totale spezifische Energie  $E$  zusammengefasst. Die Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{q}$  und  $\vec{q}_b$  sind in Koordinaten des körperfesten Systems angegeben. Das Gleichungssystem Gl. (2.4) beschreibt, wie sich die Strömungsgrößen  $\vec{W}$  in einem

zeitlich veränderlichen Kontrollvolumen  $V$  unter Berücksichtigung der Flüsse durch die Oberfläche des Kontrollvolumens  $\partial V$  und einem aus der Systemrotation resultierenden Quellterm  $\vec{G}$  verändern.  $\vec{n}$  ist der nach außen gerichtete Normalenvektor auf dem Flächenelement  $dS$ .

Der Flussdichtetensor  $\bar{\bar{F}}$  setzt sich aus dem konvektiven Anteil  $\bar{\bar{F}}_k$  und dem viskosen Anteil  $\bar{\bar{F}}_v$  zusammen

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_k - \bar{\bar{F}}_v . \quad (2.6)$$

Der konvektive Flussdichtetensor beinhaltet alle Flüsse, die sich für eine reibungsfreie Strömung ergeben

$$\bar{\bar{F}}_k = \begin{bmatrix} \rho \vec{q} \\ \rho u \vec{q} + p \vec{i}_x \\ \rho v \vec{q} + p \vec{i}_y \\ \rho w \vec{q} + p \vec{i}_z \\ \rho H \vec{q} \end{bmatrix} . \quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnet  $p$  den Druck und  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  die kartesischen Einheitsvektoren. Für die totale spezifische Enthalpie  $H$  gilt

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (2.8)$$

mit

$$E = e + \frac{1}{2} \vec{q}^2 + k , \quad (2.9)$$

wobei  $e$  die spezifische innere Energie bezeichnet. Die turbulente kinetische Schwankungsenergie  $k$  ist die zeitlich gemittelte kinetische Energie der turbulenten Strömungsfluktuationen. Ihr Wert muss durch ein Turbulenzmodell bereitgestellt werden.

Für die hier betrachteten idealen Gase gilt die Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\rho} = R T , \quad (2.10)$$

mit der Temperatur  $T$  und der speziellen Gaskonstanten  $R$ , die sich aus der Differenz der spezifischen isobaren Wärmekapazität  $C_p$  und der spezifischen isochoren Wärmekapazität  $C_v$  ergibt

$$R = C_p - C_v . \quad (2.11)$$

Unter der weiteren Voraussetzung konstanter spezifischer Wärme mit dem Verhältnis

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} , \quad (2.12)$$

wobei  $\kappa = 1,4$  für Luft ist, gilt für die spezifische innere Energie des Gases

$$e = C_v T , \quad (2.13)$$

womit für den Druck die Beziehung

$$p = (\kappa - 1) \rho \left( E - \frac{\vec{q}^2}{2} - k \right) \quad (2.14)$$

folgt.

Der Einfluss der Reibung wird mit dem in Gl. (2.6) eingeführten viskosen Flussschertensoren  $\bar{\bar{F}}_v$  berücksichtigt. Mit den Vereinfachungen aufgrund des Wirbelviskositätsprinzips gilt

$$\bar{\bar{F}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx}\vec{i}_x + \sigma_{xy}\vec{i}_y + \sigma_{xz}\vec{i}_z \\ \sigma_{yx}\vec{i}_x + \sigma_{yy}\vec{i}_y + \sigma_{yz}\vec{i}_z \\ \sigma_{zx}\vec{i}_x + \sigma_{zy}\vec{i}_y + \sigma_{zz}\vec{i}_z \\ \Psi_x\vec{i}_x + \Psi_y\vec{i}_y + \Psi_z\vec{i}_z \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Für Newtonsche Fluide ergeben sich die Komponenten des Spannungstensors zu

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_e \operatorname{div}(\vec{q}) - \frac{2}{3}\rho k \\ \sigma_{yy} &= 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu_e \operatorname{div}(\vec{q}) - \frac{2}{3}\rho k \\ \sigma_{zz} &= 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu_e \operatorname{div}(\vec{q}) - \frac{2}{3}\rho k \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \mu_e \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu_e \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei die Divergenz der Geschwindigkeit mit

$$\operatorname{div}(\vec{q}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.17)$$

ermittelt wird. Die effektive Viskosität des Fluids  $\mu_e$  berechnet sich aus der Summe der dynamischen Viskosität  $\mu$  des betrachteten Gases und der Wirbelviskosität  $\mu_{tu}$

$$\mu_e = \mu + \mu_{tu}. \quad (2.18)$$

Die Abhängigkeit der dynamischen Viskosität  $\mu$  des Gases von der Temperatur kann mit dem Gesetz von Sutherland angenähert werden. Die Wirbelviskosität  $\mu_{tu}$  ist ein Maß für die Wirkung der turbulenten Fluktuationen in der Strömung. Sie folgt aus dem Wirbelviskositätsansatz von Boussinesq, siehe z. B. Blazek [15]. Die Größe von  $\mu_{tu}$  muss mit Hilfe eines Turbulenzmodells bestimmt werden.

Die Terme  $\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$  in Gl. (2.15) sind durch

$$\begin{aligned} \Psi_x &= u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy} + w\sigma_{xz} + \left( \mu + \frac{\mu_{tu}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda_e \frac{\partial T}{\partial x} \\ \Psi_y &= u\sigma_{yx} + v\sigma_{yy} + w\sigma_{yz} + \left( \mu + \frac{\mu_{tu}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} + \lambda_e \frac{\partial T}{\partial y} \\ \Psi_z &= u\sigma_{zx} + v\sigma_{zy} + w\sigma_{zz} + \left( \mu + \frac{\mu_{tu}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} + \lambda_e \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

gegeben, wobei die Konstante  $\sigma_k$  vom verwendeten Turbulenzmodell abhängt. Die effektive Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_e$  ist durch die Beziehung

$$\lambda_e = \lambda + \lambda_{tu} \quad (2.20)$$

gegeben, wobei für Luft die Wärmeleitung  $\lambda$  durch

$$\lambda = C_p \frac{\mu}{\text{Pr}} \quad (2.21)$$

mit der Prandtl-Zahl  $\text{Pr} = 0,72$  berechnet werden kann. Die turbulente Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{tu}$  berücksichtigt den gesteigerten Wärmetransport aufgrund der Turbulenz. Es gilt

$$\lambda_{tu} = C_p \frac{\mu_{tu}}{\text{Pr}_{tu}} \quad (2.22)$$

mit der turbulenten Prandtl-Zahl für Luft  $\text{Pr}_{tu} = 0,9$ .

Der Quellterm  $\vec{G}$  in Gl. (2.4) lautet

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \vec{\Omega} \times \vec{q} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

wobei  $\vec{\Omega}$  die Rotationsgeschwindigkeit des bewegten Systems gegenüber dem Inertialsystem ist, vgl. Gl. (2.3).

### 2.1.2 Transportgleichungen der Turbulenzgrößen

Die Untersuchung turbulenter Strömungen wird durch die Reynolds-Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen in Verbindung mit der Boussinesq-Annahme deutlich vereinfacht, da anstelle einer zeitlich fluktuierenden Strömung eine stationäre oder niederfrequent instationäre Strömung betrachtet werden kann. Der Einfluss der Turbulenz wird dabei ausschließlich durch die turbulente Energie  $k$  sowie die Wirbelviskosität  $\mu_{tu}$  berücksichtigt. Diese beiden Größen müssen durch ein geeignetes Turbulenzmodell bereitgestellt werden. Ein häufig genutztes Modell ist das  $k\omega$ -Turbulenzmodell von Wilcox [115]. Es stellt zwei zusätzliche Gleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und die spezifische Dissipationsrate  $\omega$  zur Verfügung. Aus diesen beiden Größen kann die Wirbelviskosität mit der Beziehung

$$\mu_{tu} = \frac{\rho k}{\omega} \quad (2.24)$$

berechnet werden. Das in ein bewegtes System transformierte Gleichungssystem des  $k\omega$ -Turbulenzmodells lautet

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{W}_{tu} dV + \oint_{\partial V} \left( \vec{F}_{tu} - \vec{W}_{tu} \cdot \vec{q}_b \right) \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{S}_{tu} dV, \quad (2.25)$$

wobei der Vektor der konservativen Variablen  $\vec{W}_{tu}$  der Turbulenzgleichung

$$\vec{W}_{tu} = \begin{bmatrix} \rho k \\ \rho \omega \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ist. Der Flussdichtetensor  $\bar{\bar{F}}_{tu}$  kann analog zu Gl. (2.6) in einen konvektiven Anteil  $\bar{\bar{F}}_{k,tu}$  und einen viskosen Anteil  $\bar{\bar{F}}_{v,tu}$  aufgeteilt werden

$$\begin{aligned}\bar{\bar{F}}_{tu} &= \bar{\bar{F}}_{k,tu} - \bar{\bar{F}}_{v,tu} \\ &= \begin{bmatrix} \rho k \vec{q} \\ \rho \omega \vec{q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left( \mu + \frac{\mu_{tu}}{\sigma_k} \right) \left( \frac{\partial k}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial k}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial k}{\partial z} \vec{i}_z \right) \\ \left( \mu + \frac{\mu_{tu}}{\sigma_\omega} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial \omega}{\partial z} \vec{i}_z \right) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.27)$$

mit den Modellkonstanten  $\sigma_k, \sigma_\omega$ . Der Quellterm  $\vec{S}_{tu}$  in Gl. (2.25) lautet ausgeschrieben

$$\vec{S}_{tu} = \begin{bmatrix} \mu_{tu} \Upsilon - \frac{2}{3} \rho k \operatorname{div}(\vec{q}) - \beta_k \rho \omega k \\ \gamma_\omega \frac{\omega}{k} (\mu_{tu} \Upsilon - \frac{2}{3} \rho k \operatorname{div}(\vec{q})) - \beta_\omega \rho \omega^2 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

wobei  $\beta_k, \beta_\omega, \gamma_\omega$  Modellkoeffizienten sind.  $\Upsilon$  bezeichnet die Invariante der Scherrate

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \frac{4}{3} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ &\quad + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Für die Modellkoeffizienten des  $k\omega$ -Turbulenzmodells werden in dieser Arbeit die Parameter

$$\beta_k = 0,09, \quad \beta_\omega = 0,0071, \quad \gamma_\omega = 0,5556, \quad \sigma_k = 2,0, \quad \sigma_\omega = 2,0 \quad (2.30)$$

verwendet, wobei der Wert von  $\beta_\omega$  etwas von dem von Wilcox [115] gewählten Wert  $\beta_\omega = 0,075$  abweicht. Zu einer Diskussion der gewählten Koeffizienten siehe Rudnik [90] oder Eisfeld und Rudnik [33].

## 2.2 Numerisches Verfahren zur Lösung der Strömungsgleichungen

Als Basis für die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen dient der DLR-Strömungslöser FLOWer [56]. Nachfolgend wird das in FLOWer implementierte Lösungsverfahren beschrieben, soweit es für das Verständnis des weiteren Vorgehens erforderlich ist.

Zur numerischen Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen und der Turbulenzgleichungen müssen die Gleichungssysteme diskretisiert werden. Das bedeutet, dass anstelle einer kontinuierlichen Lösung die Strömungsgrößen approximativ an diskreten Punkten in den räumlichen Richtungen und in der Zeit bestimmt werden. Dazu wird im Folgenden entsprechend der Linien-Methode die Diskretisierung von Raum und Zeit getrennt vorgenommen.

### 2.2.1 Räumliche Diskretisierung der Hauptgleichungen

Die räumliche Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen Gl. (2.4) erfolgt mit einem Finite-Volumen Ansatz. Dazu wird das Lösungsgebiet in einzelne, nichtüberlap-

pende Zellen aufgeteilt, die als Approximation der infinitesimal kleinen Kontrollvolumen in Gl. (2.4) dienen. Zur Aufteilung des Rechengebiets nutzt FLOWer strukturierte, körperangepasste Rechengitter, wobei die Kreuzungspunkte der Netzlinien die Eckpunkte der hexaederförmigen Zellen bzw. Kontrollvolumen bilden. Das Basisverfahren erlaubt die Nutzung von Mehrblockgittern, bei denen das Rechengebiet mit mehreren sich nicht gegenseitig überlappenden Netzen überdeckt wird. Die Strömungsgrößen werden den Zentren der Zellen zugeordnet, so dass auch von einer zellzentrierten Diskretisierung gesprochen wird. Alternativ kann in FLOWer auch eine Zelleckpunkt-Diskretisierung genutzt werden, bei der die Strömungsgrößen an den Ecken der Zellen berechnet werden. Dieses Verfahren wird in dieser Arbeit nicht für Strömungsberechnungen verwendet, so dass es nicht weiter beschrieben wird.

Bei strukturierten Rechengittern werden die Netzknoten entlang der Netzlinien durchnummeriert, so dass bei einem dreidimensionalen Gitter jeder Knotenpunkt eindeutig über die Indizes  $i, j, k$  sowie die Blocknummer identifiziert werden kann. Die Nummerierung der Zellzentren erfolgt analog, wobei die Indizes des Zellzentrums mit den kleinsten Indizes der angrenzenden Netzknoten übereinstimmen, siehe Bild 2.2.

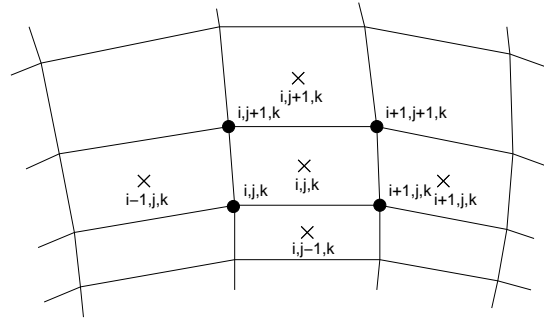


Bild 2.2: Nummerierung der Netzknoten (•) und Zellzentren (×) bei einem strukturierten Rechengitter

Die Diskretisierung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen Gl. (2.4) ergibt unter der Annahme konstanter Strömungsgrößen in der gesamten Zelle das Gleichungssystem

$$V_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial t} \vec{W}_{i,j,k} + \vec{Q}_{i,j,k} + V_{i,j,k} \vec{G}_{i,j,k} = 0 \quad . \quad (2.31)$$

$\vec{Q}$  ist die Approximation des Oberflächenintegrals der Flüsse durch die sechs Seitenflächen des hexaedrischen Kontrollvolumens

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{i,j,k} = & \bar{\vec{F}}_{i-\frac{1}{2},j,k} \cdot \vec{n}_{i-\frac{1}{2},j,k} \cdot S_{i-\frac{1}{2},j,k} - \vec{W}_{i-\frac{1}{2},j,k} \cdot A_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ & + \bar{\vec{F}}_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot \vec{n}_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot S_{i+\frac{1}{2},j,k} - \vec{W}_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot A_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ & + \bar{\vec{F}}_{i,j-\frac{1}{2},k} \cdot \vec{n}_{i,j-\frac{1}{2},k} \cdot S_{i,j-\frac{1}{2},k} - \vec{W}_{i,j-\frac{1}{2},k} \cdot A_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ & + \bar{\vec{F}}_{i,j+\frac{1}{2},k} \cdot \vec{n}_{i,j+\frac{1}{2},k} \cdot S_{i,j+\frac{1}{2},k} - \vec{W}_{i,j+\frac{1}{2},k} \cdot A_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ & + \bar{\vec{F}}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \cdot \vec{n}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \cdot S_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \vec{W}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \cdot A_{i,j,k-\frac{1}{2}} \\ & + \bar{\vec{F}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \cdot S_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \vec{W}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \cdot A_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad , \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei  $\vec{n}$  die nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektoren auf den Seitenflächen der Zelle sind und  $S$  den Flächeninhalt der Seitenfläche angibt. Die Strömungsgrößen an einer Seitenfläche berechnen sich als Mittelwert der konservativen Variablen in den angrenzenden Zellen. Somit gilt beispielsweise für die Auswertung des Flusssichtensors an der Seitenfläche  $i - \frac{1}{2}, j, k$

$$\bar{\bar{F}}_{i-\frac{1}{2},j,k} = \bar{\bar{F}} \left( \vec{W}_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) \quad (2.33)$$

mit

$$\vec{W}_{i-\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2} \left( \vec{W}_{i-1,j,k} + \vec{W}_{i,j,k} \right) . \quad (2.34)$$

Die Variable  $A$  in Gl. (2.32) bezeichnet den Volumenfluss durch die Seitenflächen aufgrund der Netzbewegung. Der Volumenfluss berechnet sich zum Beispiel für die Seitenfläche  $i + \frac{1}{2}, j, k$  zu

$$A_{i+\frac{1}{2},j,k} = \oint_{S_{i+\frac{1}{2},j,k}} \vec{q}_b \cdot \vec{n} dS_{i+\frac{1}{2},j,k} . \quad (2.35)$$

Das Integral enthält rein geometrische Größen und kann analytisch berechnet werden, siehe Pahlke [75].

Die zur Berechnung des viskosen Flusssichtensors erforderlichen Gradienten werden mit finiten Differenzen ermittelt, siehe Blazek [15] oder Radespiel et al. [82].

Um die Robustheit des Verfahrens zu steigern, werden die Beiträge der turbulenten Schwankungsenergie  $k$  auf die Hauptströmungsgleichungen vernachlässigt. Eine Rechtfertigung dieses Vorgehens wird von Fassbender [35] gegeben.

Die beschriebene räumliche Diskretisierung mit einem zentralen Schema ist numerisch nicht stabil, sondern ermöglicht die ungedämpfte Entstehung und Ausbreitung hochfrequenter Schwingungen. Um diese zu dämpfen, fügen Jameson et al. [44] einen zusätzlichen dissipativen Operator  $\vec{D}$  in Gl. (2.31) ein

$$V_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial t} \vec{W}_{i,j,k} + \vec{Q}_{i,j,k} + V_{i,j,k} \vec{G}_{i,j,k} - \vec{D}_{i,j,k} = 0 . \quad (2.36)$$

Dargestellt als Flussbilanz lautet der Operator

$$\vec{D}_{i,j,k} = \vec{d}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \vec{d}_{i-\frac{1}{2},j,k} + \vec{d}_{i,j+\frac{1}{2},k} - \vec{d}_{i,j-\frac{1}{2},k} + \vec{d}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \vec{d}_{i,j,k-\frac{1}{2}} , \quad (2.37)$$

wobei beispielsweise für den dissipativen Fluss durch die Zellseitenfläche  $i + \frac{1}{2}, j, k$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \vec{d}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \psi_{i+\frac{1}{2},j,k} \{ & \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(2)} \left( \vec{W}_{i+1,j,k} - \vec{W}_{i,j,k} \right) \\ & - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(4)} \left( \vec{W}_{i+2,j,k} - 3\vec{W}_{i+1,j,k} + 3\vec{W}_{i,j,k} - \vec{W}_{i-1,j,k} \right) \} \end{aligned} \quad (2.38)$$

mit

$$\vec{W} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho H]^T \quad (2.39)$$

gilt. Die Koeffizienten  $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(2)}$  und  $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(4)}$  werden so gewählt, dass bei schwachen Druckgradienten das Verfahren mit den dritten Differenzen stabilisiert wird, während



zur Vermeidung von Oszillationen bei starken Druckgradienten, wie insbesondere Verdichtungsstößen, über die ersten Differenzen die Verfahrensordnung auf erste Ordnung Genauigkeit reduziert wird. Die Berechnungsvorschriften lauten

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(2)} = k^{(2)} \max(\nu_{i,j,k}, \nu_{i+1,j,k}) \quad (2.40)$$

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(4)} = \max\left(0, k^{(4)} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(2)}\right) , \quad (2.41)$$

mit einem Drucksensor

$$\nu_{i,j,k} = \frac{|p_{i-1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}|}{p_{i-1,j,k} + 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}} . \quad (2.42)$$

Mit den Parametern  $k^{(2)}$  und  $k^{(4)}$  kann der Einfluss der Dissipation eingestellt werden. Typische Werte sind  $k^{(2)} = \frac{1}{2}$  und  $k^{(4)} = \frac{1}{32} \dots \frac{1}{128}$ , siehe Kroll und Jain [54].

Der Skalierungsfaktor  $\psi_{i+\frac{1}{2},j,k}$  in Gl. (2.38) ist ein gewichtetes Mittel der Spektralradien der angrenzenden Zellen, wobei die Wichtung auf Basis der Streckung der Zellen bestimmt wird. Die Berechnungsvorschrift für  $\psi_{i+\frac{1}{2},j,k}$  kann Radespiel et al. [82] entnommen werden.

## 2.2.2 Räumliche Diskretisierung der Turbulenzgleichungen

Die Turbulenzgleichungen Gl. (2.25) werden analog zu den Hauptströmungsgleichungen mit einem Finite-Volumen Verfahren diskretisiert

$$V_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial t} \vec{W}_{tu;i,j,k} + \vec{Q}_{tu;i,j,k} = V_{i,j,k} \vec{S}_{tu;i,j,k} . \quad (2.43)$$

Abweichend von den Ausführungen für die Hauptströmung werden die konvektiven turbulenten Flüsse mit einem vereinfachten Roe-Schema berechnet, siehe Faßbender [35]. Es hat sich dabei als ausreichend erwiesen, die Flüsse nur mit einer Genauigkeit erster Ordnung zu bestimmen, siehe Rudnik [90]. Die Berechnungsvorschrift für die Summe aus dem konvektiven turbulenten Fluss und dem Fluss aufgrund der Netzbewegung lautet beispielsweise für die Zellseitenfläche  $i + \frac{1}{2}, j, k$  (vgl. Gl. (2.32))

$$\begin{aligned} \bar{\bar{F}}_{k,tu;i+\frac{1}{2},j,k} \cdot \vec{n}_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot S_{i+\frac{1}{2},j,k} - \vec{W}_{tu;i+\frac{1}{2},j,k} \cdot A_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ = \frac{1}{2} \tilde{q}_{i+\frac{1}{2},j,k} \left( \vec{W}_{tu;i+1,j,k} + \vec{W}_{tu;i,j,k} \right) \\ - \frac{1}{2} \left| \tilde{q}_{i+\frac{1}{2},j,k} \right| \left( \vec{W}_{tu;i+1,j,k} - \vec{W}_{tu;i,j,k} \right) , \end{aligned} \quad (2.44)$$

wobei für den Volumenfluss durch die Zellseitenfläche

$$\tilde{q}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2} (\vec{q}_{i,j,k} + \vec{q}_{i+1,j,k}) \cdot \vec{n}_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot S_{i+\frac{1}{2},j,k} - A_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (2.45)$$

gilt. Der Volumenfluss aufgrund der Netzbewegung  $A$  wird entsprechend Gl. (2.35) berechnet.

Die zur Auswertung des viskosen Flussdichtensors  $\bar{\bar{F}}_{v,tu}$  und des Quellterms  $\vec{S}_{tu}$  erforderlichen Gradienten werden analog zur Hauptströmung mit Hilfe finiter Differenzen berechnet. Das vereinfachte Roe-Schema erfordert keine zusätzliche künstliche Dissipation.

### 2.2.3 Zeitliche Diskretisierung der Hauptgleichungen

Durch die räumliche Diskretisierung der Hauptgleichungen entsteht ein System gekoppelter, gewöhnlicher Differentialgleichungen bezüglich der Zeit (vgl. Gl. (2.36))

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{W}_{i,j,k} = -\frac{1}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k} \quad (2.46)$$

mit dem so genannten Residuum

$$\vec{R}_{i,j,k} = \vec{Q}_{i,j,k} + V_{i,j,k} \vec{G}_{i,j,k} - \vec{D}_{i,j,k} \quad (2.47)$$

Die zeitliche Integration erfolgt mit einem hybriden, expliziten Runge-Kutta-Schema, siehe Jameson et al. [44, 45]

$$\begin{aligned} \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} &= \vec{W}_{i,j,k}^n \\ \vec{W}_{i,j,k}^{(s)} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} - \alpha_s \frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{(s-1)} \quad , \quad s = 1 \dots r \\ \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(r)} \quad . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dabei bezeichnet der Index  $n$  die Zeitschrittnummer zum Zeitpunkt  $n \cdot \Delta t$ ,  $s$  ist die Stufennummer und  $r$  die Gesamtzahl der Stufen. Für das in dieser Arbeit genutzte fünfstufige Runge-Kutta-Schema werden die Koeffizienten

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{6} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{3}{8} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha_5 = 1 \quad (2.49)$$

verwendet, vgl. Kroll und Jain [54]. Im Gegensatz zu den anderen Operatoren des Residuums wird der Operator der künstlichen Dissipation  $D$  nicht auf jeder Stufe neu berechnet, sondern entsprechend

$$\vec{D}_{i,j,k}^{(s)} = \beta_s \vec{D}_{i,j,k}^{(s)} + (1 - \beta_s) \vec{D}_{i,j,k}^{(s-1)} \quad (2.50)$$

ausgewertet. Hierbei werden für die Berechnung reibungsfreier bzw. reibungsbehafteter Strömungen unterschiedliche Koeffizienten genutzt

$$\begin{aligned} \text{reibungsfrei: } & \beta_1 = 1 \quad , \quad \beta_2 = 1 \quad , \quad \beta_3 = 0 \quad , \quad \beta_4 = 0 \quad , \quad \beta_5 = 0 \\ \text{reibungsbehaftet: } & \beta_1 = 1 \quad , \quad \beta_2 = 0 \quad , \quad \beta_3 = 0,56 \quad , \quad \beta_4 = 0 \quad , \quad \beta_5 = 0,44 \quad , \end{aligned} \quad (2.51)$$

siehe Kroll und Jain [54] und Radespiel und Swanson [81].

Die Größe des Integrationszeitschritts  $\Delta t$  ist durch eine als Courant-Friedrich-Lewy-Bedingung (CFL) in der Literatur bekannte Stabilitätsgrenze nach oben beschränkt. Nach der linearen Stabilitätstheorie ergibt sich für das obige Verfahren eine CFL-Zahl von 4,0.

Für zeitgenaue Rechnungen mit einem expliziten Verfahren wird der Zeitschritt durch den kleinsten zulässigen Zeitschritt aller Zellen bestimmt

$$\Delta t = \min (\Delta t_{i,j,k} \mid \forall i, j, k) \quad (2.52)$$

Der kleinste Zeitschritt wird im Allgemeinen von den Zellen mit den kleinsten Volumen bestimmt, so dass insbesondere bei Netzen mit hoher Auflösung einer Grenzschicht sehr kleine Zeitschritte erforderlich sind.

### 2.2.4 Konvergenzbeschleunigung expliziter Zeitschrittverfahren

Die Effizienz eines expliziten Zeitschrittverfahrens kann durch verschiedene Maßnahmen gesteigert werden. Sie sind jedoch nur für stationäre Strömungen geeignet, da sie die zeitgenaue Entwicklung des Strömungsfeldes nicht ermöglichen. In dieser Arbeit werden die folgenden Beschleunigungstechniken genutzt:

- lokale Zeitschritte
- implizites Residuenglätten
- Mehrgittertechnik
- Vorkonditionierung für niedrige Strömungsgeschwindigkeiten.

Abgesehen von der Vorkonditionierung haben alle Beschleunigungstechniken keinen Einfluss auf die stationäre Strömungslösung. Da die Vorkonditionierung zusätzlich die Genauigkeit der Strömungslösung verbessert, wird sie separat in Kapitel 2.2.7 behandelt.

Bei der Verwendung lokaler Zeitschritte wird die zeitliche Integration der Strömungsgrößen nicht mit einem globalen Zeitschritt nach Gl. (2.52) durchgeführt, sondern mit dem für die gegebene Zelle größt möglichen Zeitschritt, der nach der CFL-Bedingung zulässig ist. Diese Vorgehensweise führt bei Netzen mit unterschiedlich großen Zellen zu einer deutlich erhöhten Konvergenzgeschwindigkeit.

Beim impliziten Residuenglätten wird in Gl. (2.48) das mit dem Zeitschritt pro Volumen multiplizierte Residuum  $\vec{R}_{i,j,k}$

$$\vec{R}_{i,j,k} = \frac{\Delta t_{i,j,k}}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k} \quad (2.53)$$

durch ein über die Nachbarzellen gemitteltes Residuum  $\vec{\bar{R}}_{i,j,k}$  ersetzt. Die Mittelung erfolgt linienimplizit und lautet in  $i$ -Indexrichtung

$$-\varepsilon_{i,j,k}^i \vec{\bar{R}}_{i-1,j,k} + (1 + 2\varepsilon_{i,j,k}^i) \vec{\bar{R}}_{i,j,k} - \varepsilon_{i,j,k}^i \vec{\bar{R}}_{i+1,j,k} = \vec{\bar{R}}_{i,j,k} \quad (2.54)$$

Die nachfolgende Mittelung in  $j$ - und  $k$ -Indexrichtung erfolgt analog zu Gl. (2.54). Die Glättungskoeffizienten  $\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k$  hängen von den Spektralradien der Fluss-Jacobi-Matrizen ab. Sie werden entweder entsprechend Radespiel et al. [82] oder nach Swanson (veröffentlicht von Turkel et al. [106]) berechnet, wodurch in dieser Arbeit Strömungssimulationen mit einer CFL-Zahl von 7,5 bzw. 15 ermöglicht werden. Die Glättung kann bei jeder Stufe des Runge-Kutta-Verfahrens angewendet werden oder nur bei jeder ungeraden Stufe, wobei in der vorliegenden Arbeit die erste Möglichkeit genutzt wird.

Bei der Mehrgitterbeschleunigungstechnik werden zusätzliche Strömungslösungen auf einer Sequenz gröberer Gitter erzeugt, auf deren Basis Korrekturen für die Lösungen auf den feineren Gittern berechnet werden, siehe z. B. Blazek [15]. In FLOWer wird die so genannte FAS-Mehrgittertechnik („Full Approximation Scheme“) genutzt,

welche erstmalig von Jameson und Baker [46] zur Lösung der Euler-Gleichungen verwendet wurde. Im Folgenden wird kurz auf den Algorithmus eingegangen, wobei von nur einem feinen Gitter (Index  $()_f$ ) und einem groben Gitter (Index  $()_g$ ) ausgegangen wird. Für eine hohe Effizienz des Verfahrens werden meist mehr als zwei Mehrgitterebenen verwendet, so dass die beschriebene Vorgehensweise rekursiv anzuwenden ist. Die benötigten groben Gitter werden durch Entfernen jeder zweiten Netzlinie aus einem feineren Gitter erzeugt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Zellindizes  $()_{i,j,k}$  weggelassen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eine Lösung auf dem feinen Gitter  $\vec{W}^{n+1}$  nach einem expliziten Zeitschritt. Die Strömungslösung wird volumengewichtet mit einem Interpolationsoperator  $\tilde{I}_f^g$  auf das grobe Gitter transferiert

$$\vec{W}_g^{(0)} = \tilde{I}_f^g \vec{W}_f^{n+1} . \quad (2.55)$$

Um die Genauigkeit der Feingitterlösung auf dem groben Gitter zu erhalten, wird eine Funktion  $\vec{P}_g$  („forcing function“) gebildet. Für diese werden mit einem Restriktionsoperator  $I_f^g$  für jede grobe Zelle die Residuen der entsprechenden feinen Zellen aufsummiert und die Differenz zu dem neu berechneten Residuum auf dem groben Gitter gebildet

$$\vec{P}_g = I_f^g \vec{R}_f^{n+1} - \vec{R}_g^{(0)} . \quad (2.56)$$

Nun wird mit einem oder mehreren Zeitschritten des Runge-Kutta-Verfahrens Gl. (2.48) eine neue Lösung auf dem groben Gitter berechnet, wobei zu dem Residuum jeder Stufe die Funktion  $\vec{P}_g$  hinzuaddiert wird

$$\begin{aligned} \vec{W}_g^{(s)} &= \vec{W}_g^{(0)} - \alpha_s \frac{\Delta t}{V_g} \left( \vec{R}_g^{(s-1)} + \vec{P}_g \right) , \quad s = 1 \dots r \\ \vec{W}_g^{n+1} &= \vec{W}_g^{(r)} . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Auf der ersten Stufe des Runge-Kutta-Verfahrens hängt die Änderung der Strömungsgrößen ausschließlich vom transferierten Feingitterresiduum ab ( $\vec{R}_g^{(0)} + \vec{P}_g = I_f^g \vec{R}_f^{n+1}$ ), so dass insbesondere sichergestellt ist, dass sich im Fall einer stationären Lösung ( $\vec{R}_f^{n+1} = 0$ ) keine Änderung der groben Strömungslösung ergibt. Die als Grobgitterkorrektur bezeichnete Änderung der Strömungslösung auf dem groben Netz

$$\Delta \vec{W}_g = \vec{W}_g^{n+1} - \vec{W}_g^{(0)} \quad (2.58)$$

wird nun mit dem Prolongationsoperator  $\tilde{I}_g^f$  auf das feine Netz interpoliert und zur Verbesserung der Feingitterlösung genutzt

$$\vec{W}_f^+ = \vec{W}_f^{n+1} + \tilde{I}_g^f \Delta \vec{W}_g . \quad (2.59)$$

Falls mehr als zwei Mehrgitterebenen verwendet werden, kann über die Reihenfolge, in der Strömungslösungen auf den verschiedenen groben Gittern berechnet werden, und über die Zahl der zeitlichen Integrationsschritte auf dem jeweiligen Gitter, die Effizienz des Mehrgitterverfahrens optimiert werden. In dieser Arbeit wird ausschließlich der so genannte Sägezahn-V-Zyklus benutzt, bei dem bis zum Erreichen des größten

Gitters ein Zeitschritt auf dem jeweiligen Gitter berechnet wird und kein Zeitschritt bei der Prolongation der Daten auf das nächst feinere Gitter.

Zur Steigerung der Robustheit wird in FLOWer auf groben Netzebenen die Genauigkeit des Verfahrens reduziert, indem zur Berechnung der dissipativen Flüsse lediglich erste Differenzen verwendet werden. Weiterhin erfolgt eine Glättung der Mehrgitterkorrekturen auf dem feinsten Gitter mit Gl. (2.54) unter Verwendung konstanter Koeffizienten  $\varepsilon^i = \varepsilon^j = \varepsilon^k = 0,1$ , siehe Radespiel et al. [82].

## 2.2.5 Zeitliche Diskretisierung der Turbulenzgleichungen

Die zeitliche Integration der Turbulenzgleichungen kann ebenfalls mit dem fünfstufigen Runge-Kutta-Verfahren entsprechend Kapitel 2.2.3 durchgeführt werden. Nach Faßbender [35] führt jedoch der Quellterm der Turbulenzgleichungen Gl. (2.43) zu einer Destabilisierung der Mehrgittertechnik, so dass dieser Beschleunigungsalgorithmus häufig nicht genutzt werden kann. Daher wird anstelle eines expliziten Zeitschrittverfahrens für die Berechnung der Turbulenzgleichungen ein implizites Verfahren verwendet, welches prinzipiell beliebig große Zeitschritte zulässt [35].

Eine aus Gl. (2.43) folgende implizite Diskretisierung der Zeit ist durch

$$\frac{V_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta \vec{W}_{tu;i,j,k} = -\vec{R}_{tu;i,j,k}^{n+1} \quad (2.60)$$

gegeben, wobei  $\Delta \vec{W}_{tu;i,j,k}$  die Änderung des Vektors der konservativen, turbulenten Variablen vom Zeitpunkt  $n$  zum Zeitpunkt  $n+1$  ist

$$\Delta \vec{W}_{tu;i,j,k} = \vec{W}_{tu;i,j,k}^{n+1} - \vec{W}_{tu;i,j,k}^n \quad (2.61)$$

und  $\vec{R}_{tu;i,j,k}^{n+1}$  das turbulente Residuum zum Zeitpunkt  $n+1$

$$\vec{R}_{tu;i,j,k}^{n+1} = \vec{Q}_{tu;i,j,k}^{n+1} - V_{i,j,k} \vec{S}_{tu;i,j,k}^{n+1} \quad (2.62)$$

$\vec{W}_{tu;i,j,k}^{n+1}$  ist unbekannt, so dass  $\vec{R}_{tu;i,j,k}^{n+1}$  nicht berechnet werden kann. Stattdessen wird eine Linearisierung

$$\vec{R}_{tu;i,j,k}^{n+1} \approx \vec{R}_{tu;i,j,k}^n + \left( \frac{\partial \vec{R}_{tu}^n}{\partial \vec{W}_{tu}^n} \right)_{i,j,k} \Delta \vec{W}_{tu,op} \quad (2.63)$$

vorgenommen. Da in das Residuum der Zelle  $i, j, k$  entsprechend des räumlichen Diskretisierungsoperators auch die Strömungsgrößen der Nachbarzellen eingehen und somit auch in die Fluss-Jacobi-Matrix, sind in  $\Delta \vec{W}_{tu,op}$  die  $\Delta \vec{W}_{tu;i,j,k}$  aller Zellen des Operators zusammengefasst. Das Einsetzen in Gl. (2.60) liefert

$$\left[ \frac{V_{i,j,k}}{\Delta t} + \left( \frac{\partial \vec{R}_{tu}^n}{\partial \vec{W}_{tu}^n} \right)_{i,j,k} \right] \Delta \vec{W}_{tu,op} = -\vec{R}_{tu;i,j,k}^n \quad (2.64)$$

Das Aufstellen der Gleichung für alle Zellen eines Netzblocks ergibt ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten  $\Delta \vec{W}_{tu}$

$$\mathbf{M} \cdot \Delta \vec{W}_{tu} = -\vec{R}_{tu}^n \quad (2.65)$$

Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit einem DDADI-Verfahren („Diagonal Dominant Alternating Direction Implicit“), siehe Faßbender [35].

Bei einer Strömungsberechnung mit FLOWer wird pro Mehrgitterzyklus zur Berechnung der Hauptströmung ein impliziter Zeitschritt zum Lösen der Turbulenzgleichungen ausgeführt. In Analogie zum expliziten Zeitschrittverfahren werden beim impliziten Algorithmus ebenfalls lokale Zeitschritte verwendet. Der Zeitschritt pro Zelle wird dabei so gewählt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen denen des expliziten Verfahrens entspricht.

## 2.2.6 Randbedingungen

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen erfordert die Vorgabe einer Anfangsbedingung und verschiedener Randbedingungen. In FLOWer wird als Anfangsbedingung das gesamte Strömungsfeld mit den Werten der freien Anströmung initialisiert. Zur Vorgabe der Randbedingungen wird jeder Netzblock um zwei Zellschichten mit Hilfszellen ergänzt, siehe Bild 2.3. Die Strömungswerte in den Hilfszellen werden so vorge-

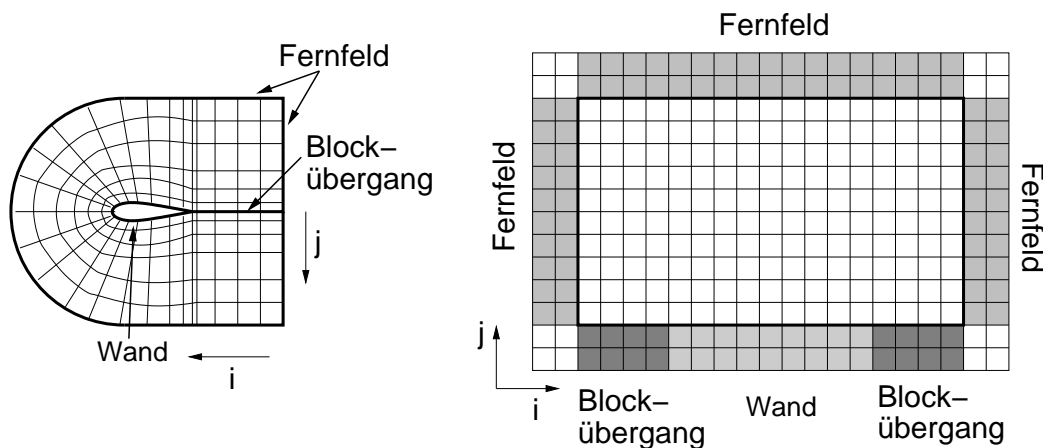


Bild 2.3: Vorgabe von Randbedingungen, links: Gitter im physikalischen Raum, rechts: Gitter im Indexraum mit Hilfszellen zur Vorgabe von Randbedingungen

geben, dass die gewünschte Randbedingung mit dem gegebenen räumlichen Diskretisierungsoperator erfüllt wird. Das Hilfszellenkonzept erlaubt dabei die Verwendung desselben Operators für Zellen innerhalb eines Blocks wie am Rand, da die Zahl der Hilfszellschichten entsprechend der räumlichen Erstreckung des Diskretisierungsoperators gewählt ist.

Die in dieser Arbeit genutzten Randbedingungen sind:

- **Körperrandbedingung:** An einer adiabaten Wand erfolgt kein Massentransport durch die Wand hindurch, so dass bei einer reibungsfreien Strömung ausschließlich der Druck einen Beitrag zur Flussbilanz liefert. Die Haftbedingung bei reibungsbehafteten Strömungen wird erfüllt, indem die Strömungsgrößen aus der ersten bzw. zweiten inneren Zellschicht in die erste bzw. zweite Hilfsschicht kopiert werden. Anschließend wird das Vorzeichen der Geschwindigkeit  $\vec{q} - \vec{q}_b$  invertiert, so dass bei der Auswertung der viskosen Flüsse eine Geschwindig-

keit  $\vec{q} - \vec{q}_b = 0$  an der Wand erreicht wird. Als Randbedingung für die  $k\omega$ -Turbulenzgleichung gilt  $k = 0$  und  $\omega = \infty$ , wobei zur numerischen Implementierung der  $\omega$ -Randbedingung auf Rudnik [90] oder Eisfeld und Rudnik [33] verwiesen sei.

- Fernfeldrandbedingung: Die Vorgabe einer nicht reflektierenden Randbedingung im Fernfeld erfolgt mit einem Verfahren auf Basis der charakteristischen Variablen, siehe Kroll [55]. Die Turbulenzgrößen werden an einem Einströmrand entsprechend den Werten der freien Anströmung vorgegeben und an einem Ausströmrand mit nullter Ordnung Genauigkeit aus dem Inneren des Strömungsfeldes extrapoliert.
- Symmetrierandbedingung: An einem Symmetrierand werden die Strömungsdaten aus der ersten bzw. zweiten inneren Zellschicht in die erste bzw. zweite Zellschicht der Hilfsschichten gespiegelt.
- Blockübergang: Falls ein Rand eines Netzblocks an einen anderen stößt, entsteht ein Blockübergang oder auch Schnitttrand. An diesem werden die Strömungsdaten aus dem angrenzenden Block in die entsprechenden Hilfszellen des aktuellen kopiert.

Auf die Chimären-Randbedingung sowie die Randbedingung für Blockübergänge mit hängenden Netzknoten wird in Kapitel 3 bzw. Kapitel 4.2 eingegangen.

## 2.2.7 Vorkonditionierung

Bei einer Verringerung der Anströmgeschwindigkeit nehmen die Konvergenzrate und die räumliche Genauigkeit des beschriebenen Verfahrens ab. Die Ursache für dieses Verhalten ist, dass die Berechnung der Zeitschrittweite und die Skalierung der Dissipation auf der Basis des größten Eigenwerts der Strömungsgleichungen erfolgen. Der größte Eigenwert strebt mit abnehmender Anströmmachzahl jedoch gegen den Wert der Schallgeschwindigkeit und nicht, wie für ein von der Machzahl unabhängiges Lösungsverhalten erforderlich, gegen Null. Um diese Nachteile zu beheben, kann mit der in FLOWer implementierten Vorkonditionierungsmethode nach Choi und Merkle [28] eine Verkleinerung des größten Eigenwerts bewirkt werden. Dies entspricht einer künstlichen Absenkung der Schallgeschwindigkeit auf eine ähnliche Größe wie die Konvektionsgeschwindigkeit. Dadurch skalieren Zeitschrittweite und Dissipation mit der Anströmgeschwindigkeit, so dass eine gleich bleibende, von der Anströmgeschwindigkeit unabhängige Konvergenzrate und Lösungsgenauigkeit erreicht wird.

Um eine weitere Verbesserung der Lösungsgenauigkeit bei niedrigen Machzahlen zu erreichen, werden die in Gl. (2.38) zur Berechnung der Dissipation benötigten ersten und dritten Differenzen auf Basis der Größen Druck, Geschwindigkeit und Temperatur ausgewertet, siehe Radespiel et al. [83].

## 2.2.8 Duales Zeitschrittverfahren

Die bislang vorgestellten Algorithmen lassen die Berechnung zeitgenauer, instationärer Strömungen nur mit dem expliziten Runge-Kutta-Verfahren ohne Nutzung von Beschleunigungstechniken zu. Dies führt jedoch aufgrund der kleinen Zeitschritte nach Gl. (2.52) zu sehr hohen Rechenzeiten. Als Ausweg können für instationäre Rechnungen implizite Rechenvorschriften angewendet werden, bei denen sich der Zeitschritt ausschließlich nach der gewünschten zeitlichen Genauigkeit der Strömungslösung richtet. Jameson [47] entwickelte zu diesem Zweck das duale Zeitschrittverfahren. Er geht von einer Rückwärtsdifferenz zur Berechnung der zeitlichen Ableitung der konservativen Variablen aus, z. B. der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{3 \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} - 4 \vec{W}_{i,j,k}^n + \vec{W}_{i,j,k}^{n-1}}{2 \Delta t} , \quad (2.66)$$

für eine zeitliche Genauigkeit von zweiter Ordnung, setzt diese in Gl. (2.36) ein und erhält ein implizites Gleichungssystem zur Berechnung von  $\vec{W}_{i,j,k}^{n+1}$

$$0 = \frac{3 \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} - 4 \vec{W}_{i,j,k}^n + \vec{W}_{i,j,k}^{n-1}}{2 \Delta t} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{n+1} . \quad (2.67)$$

Zu dessen Lösung mit einem Iterationsverfahren wird ein Residuum  $\vec{R}$  eingeführt

$$\vec{R}_{i,j,k} = V_{i,j,k} \frac{3 \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} - 4 \vec{W}_{i,j,k}^n + \vec{W}_{i,j,k}^{n-1}}{2 \Delta t} + \vec{R}_{i,j,k}^{n+1} \quad (2.68)$$

und die stationäre Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k} = 0 \quad (2.69)$$

mit der Pseudozeit  $\tau$  berechnet. Das Differentialgleichungssystem kann, wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, mit einem fünfstufigen Runge-Kutta-Verfahren berechnet werden. Melson et al. [67] haben jedoch gezeigt, dass eine vom physikalischen Zeitschritt  $\Delta t$  abhängige Stabilitätsgrenze für den maximal zulässigen Wert von  $\Delta \tau$  existiert. Sie schlagen daher eine implizite Behandlung des ersten Summanden  $\frac{3}{2 \Delta t} \vec{W}_{i,j,k}^{n+1}$  von Gl. (2.68) vor und erhalten das gegenüber Gl. (2.48) modifizierte Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} &= \vec{W}_{i,j,k}^n \\ \vec{W}_{i,j,k}^{(s)} &= \frac{1}{1 + \beta_\tau} \left[ \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} + \beta_\tau \vec{W}_{i,j,k}^{(s-1)} - \alpha_s \frac{\Delta \tau}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{(s-1)} \right] , \quad s = 1 \dots r \\ \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(r)} \end{aligned} \quad (2.70)$$

mit

$$\beta_\tau = \frac{3}{2} \alpha_s \frac{\Delta \tau}{\Delta t} . \quad (2.71)$$

Dieses Zeitintegrationsschema weist keine Beschränkungen der Zeitschrittweite  $\Delta \tau$  auf. Zur Verbesserung der Effizienz des expliziten Lösungsalgorithmus können alle in



Kapitel 2.2.4 beschriebenen Beschleunigungstechniken sowie die Vorkonditionierung nach Kapitel 2.2.7 eingesetzt werden.

Das in Kapitel 2.2.5 beschriebene, nicht zeitgenaue implizite Verfahren zur Berechnung der Turbulenzgleichungen kann ebenfalls in das duale Zeitschrittverfahren eingebunden werden, siehe Fassbender [35].

## 2.2.9 Parallelisierung

Die Parallelisierung von FLOWer wurde für Rechnerarchitekturen mit verteiltem Speicher („distributed memory“) vorgenommen. Bei diesen Systemen ist jedem Prozessor ein eigener Speicher zugeordnet. Sobald während einer parallelen Rechnung Daten eines anderen Prozessors benötigt werden, müssen diese durch explizite Programmanweisungen verschickt werden. Um die Zeit für die Kommunikation zu minimieren, sollte die Menge der gesendeten Daten so klein wie möglich sein. Dies wird in FLOWer erreicht, indem ein gegebenes Mehrblocknetz blockweise auf die Prozessoren aufgeteilt wird, so dass zur Berechnung der Strömung (fast) ausschließlich der Austausch von Randwerten an Blockübergängen erforderlich ist. Die für die Kommunikation zwischen den Prozessoren erforderlichen Programmanweisungen werden von der CLIC-3D-Bibliothek („Communication Library for Industrial Codes“) [86] bereitgestellt, die ihrerseits auf der MPI-Bibliothek („Message Passing Interface“) [101] beruht, siehe Bild 2.4. Die für viele Rechnerarchitekturen verfügbare MPI-Bibliothek stellt

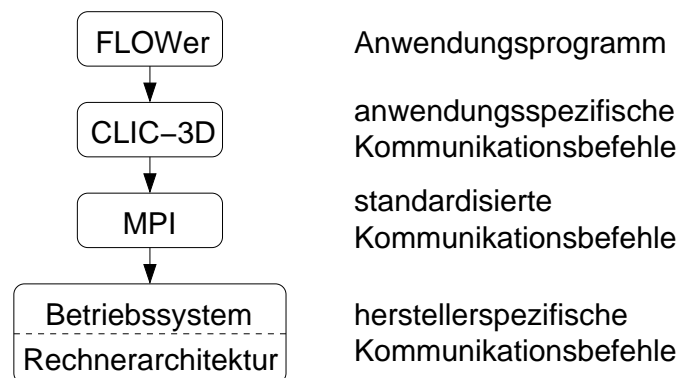


Bild 2.4: Parallelisierungsmodell in FLOWer

standardisierte Befehle zum Verschicken von Daten bereit, wodurch eine systemunabhängige Parallelisierung von Programmen ermöglicht wird. Die CLIC-3D-Bibliothek nutzt die Befehle der MPI-Bibliothek, um dem Anwender spezielle Anweisungen für Rechnungen auf blockstrukturierten Gittern zur Verfügung zu stellen. Dies betrifft beispielsweise den Austausch von Randwerten, die Datenausgabe, das Aufteilen der Blöcke auf die Prozessoren und die Fehlerbehandlung. In der Ausgangsversion des Strömungslösers FLOWer erfolgte die Kommunikation ausschließlich durch Aufrufe der CLIC-3D-Bibliothek. Aufgrund ihres beschränkten Funktionsumfangs war es jedoch im Verlauf der hier vorgestellten Arbeiten erforderlich, neben den Anweisungen der CLIC-3D-Bibliothek auch direkt Funktionen der MPI-Bibliothek für die Kommunikation zu verwenden.

Für eine parallele Rechnung wird FLOWer auf allen Prozessoren gleichzeitig gestartet, wobei einer der Prozesse, der so genannte Master-Prozess, die Steuerung des Ablaufs übernimmt. Der Master-Prozess liest zunächst die Steuerungsdaten für die Strömungsberechnung ein, siehe Bild 2.5. Anschließend erfolgt von allen Prozessen ein Aufruf

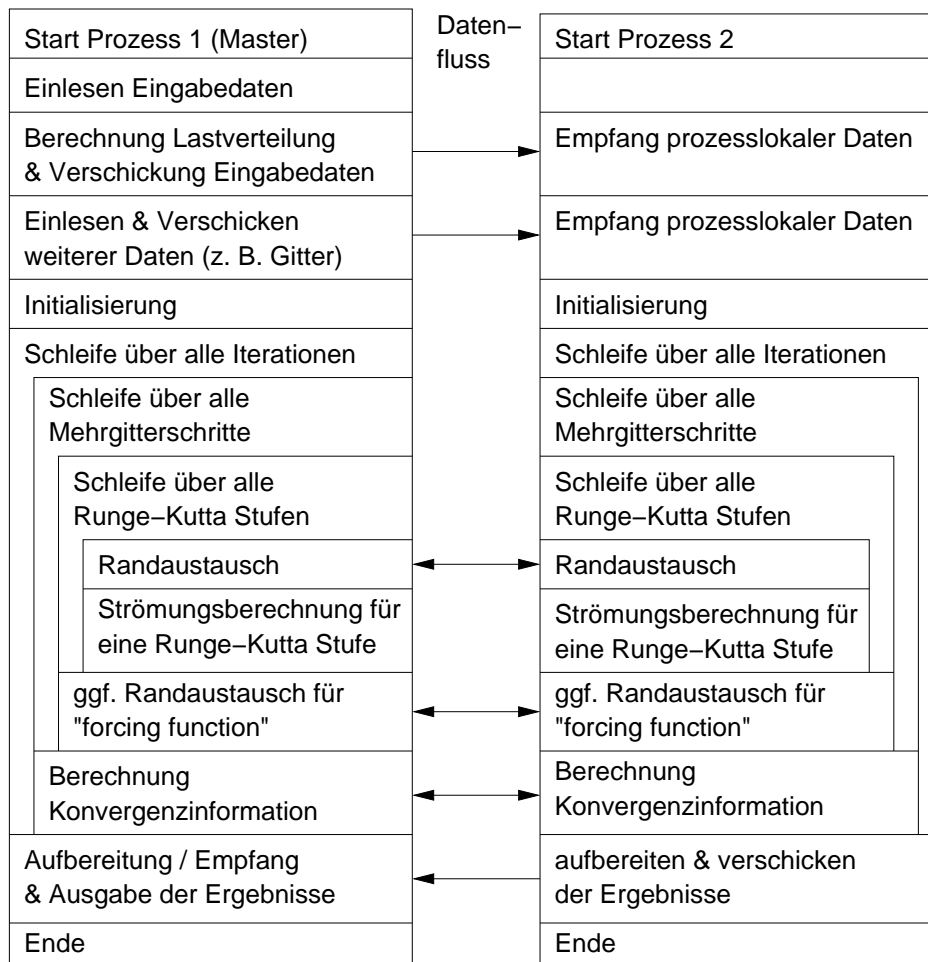


Bild 2.5: Ablauf einer parallelen Rechnung mit zwei Prozessen

der CLIC-3D-Bibliothek, welche die Netzlogik einliest und darauf basierend die Netzblöcke den Prozessoren zuteilt. Um eine gleichmäßige Lastverteilung („load balancing“) zu erzielen, wird eine ähnliche Summe an Netzknoten pro Prozessor angestrebt. Nach dem Verschicken der Steuerungsdaten vom Master-Prozess an die anderen Prozesse und dem Einlesen und Verteilen der Netzkoordinaten durch den Master-Prozess wird die Strömungsberechnung auf allen Prozessoren initialisiert. Bei der nun folgenden iterativen Lösung der Strömungsgleichungen werden zu Beginn jeder Runge-Kutta-Stufe die Randwerte an Blockübergängen ausgetauscht. Bei Mehrgitterrechnung erfolgt ein weiterer Randaustausch nach jedem Runge-Kutta-Zyklus für die „forcing function“. Weitere Kommunikation zwischen den Prozessen ist am Ende eines Mehrgitterzyklus für die Berechnung der Kraftbeiwerte und des globalen Residuums erforderlich. Zum Abschluss der Strömungsberechnung werden die berechneten Daten an den Master-Prozess geschickt, der sie seinerseits in die Ausgabedateien schreibt. Eine sequentielle Strömungsberechnung erfolgt nach demselben Schema, wobei für den Randaustausch entweder eine sequentielle Version der CLIC-3D-Bibliothek ge-

---

nutzt werden kann oder die Funktionen der CLIC-3D durch entsprechende Algorithmen von FLOWer ersetzt werden.



## 3 Chimären-Technik

Die Chimären-Technik dient zur Flexibilisierung blockstrukturierter Verfahren. Sie ermöglicht eine gegenseitige Überlappung der Blöcke eines Mehrblockgitters und ist somit bei der Netzgenerierung eine Alternative zu den konventionellen Blockübergängen, siehe Bild 3.1. Überlappende Netze wurden erstmals von Benek et al. [8] zur

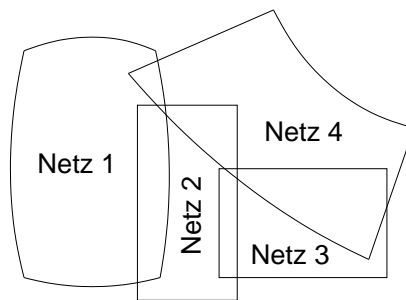


Bild 3.1: Überlappende Rechengitter

Lösung der Euler-Gleichungen eingesetzt. Eine Übersicht über den aktuellen Stand der Technik wurde bereits in Kapitel 1.4.1 gegeben. Den mathematischen Hintergrund bilden die Gebietszerlegungsmethoden nach Schwarz, siehe z. B. Smith et al. [100].

In der griechischen Mythologie bezeichnet die „Chimäre“ ein Fabelwesen, welches vorn ein Löwe, in der Mitte eine Ziege und hinten eine Schlange ist. Das Tier wurde als Namensgeber für die Chimären-Technik gewählt, da überlappende Gitter oftmals aus bereits vorhandenen Netzen neu zusammengestellt werden.

Die Beschreibung der Chimären-Technik beginnt in Kapitel 3.1 mit der Darstellung der Grundlagen, bevor anschließend in Kapitel 3.2 auf die spezifischen in FLOWer implementierten Algorithmen eingegangen wird. In Kapitel 3.3 wird schließlich eine Methode zur Berechnung globaler Kräfte und Momente bei Chimären-Netzen mit Überlappungen auf Körperoberflächen beschrieben.

### 3.1 Grundlagen

Zur Erläuterung der Chimären-Technik dient Bild 3.2. Es zeigt ein körperangepasstes Netz um ein Profil, welches in ein kartesisches Gitter eingebettet ist. Im Folgenden werden körperangepasste Netze auch Komponentennetze genannt, während mit Hintergrundgitter solche Netze bezeichnet werden, die keinen Körper beinhalten, aber das Strömungsfeld bis zur Fernfeldberandung überdecken. Sowohl Komponentennetze als

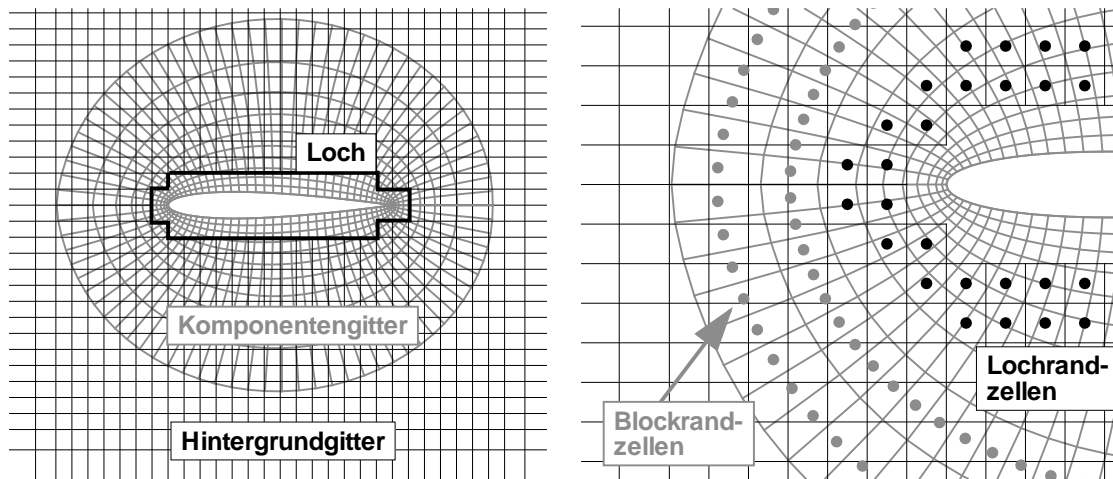


Bild 3.2: Beispiel eines Chimären-Gitters, links: Übersicht mit Darstellung des Lochs, rechts: Detail mit Orten der Interpolation, graue Punkte: Interpolation für Zellzentren des Komponentengitters, schwarze Punkte: Interpolation für Zellzentren des Hintergrundgitters

auch Hintergrundgitter können jeweils Mehrblocknetze sein. Von dem in Bild 3.2, links dargestellten kartesischen Hintergrundnetz befinden sich einige Netzzellen im Innern des Profils. Da für diese Zellen keine Strömungslösung berechnet werden kann, sind sie ausgeblendet und werden während der Strömungsberechnung nicht weiter betrachtet. Die ausgeblendeten Zellen werden auch als Loch im Rechengitter bezeichnet.

Während der Lösung der Strömungsgleichungen müssen an den Berandungen der Gitter Strömungswerte als Randbedingung vorgegeben werden. Für die Zellen an der äußeren Berandung des Profilnetzes werden zu diesem Zweck Strömungswerte aus dem Hintergrundgitter interpoliert, siehe Bild 3.2, rechts. In dem Hintergrundgitter erzeugt das Loch eine künstliche Berandung, so dass für die Zellen um das Loch herum Strömungsdaten aus dem Profilgitter interpoliert werden. Da die Interpolation nur an Block- bzw. Lochrändern erfolgt, wird im Überlappungsgebiet auf beiden Rechengittern eine Strömungslösung berechnet.

Die Auswahl der zu interpolierenden Strömungsgrößen ist nicht festgelegt. Allerdings hat Wu [118] gezeigt, dass bei einer Interpolation der Flüsse unterschiedliche Lösungen auf den sich überlappenden Gittern entstehen können. Um dieses zu verhindern, werden in dieser Arbeit die konservativen Variablen interpoliert. Die erforderliche Genauigkeit der Interpolationsvorschrift kann mit einer in Anhang B.1 angegebenen Gleichung von Chesshire und Henshaw [26] bestimmt werden. Für den in dieser Arbeit betrachteten Fall der mit einem Abbruchfehler von zweiter Ordnung diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen bei Verwendung einer Lochdefinition ohne Überlappungsminimierung ist demnach eine trilineare Interpolation ausreichend.

Bei einer Strömungsberechnung auf einem überlappenden Gitter müssen die Lochpunkte von der Berechnung der Strömungsdaten ausgenommen werden. Zu diesem Zweck wird bei Chimären-Rechnungen für jede Netzzelle ein zusätzlicher Wert *IBLANK* gespeichert, wobei  $IBLANK = 1$  eine Berechnung der Strömung bedeutet und  $IBLANK = 0$  das Unterbinden einer Strömungsberechnung.  $IBLANK = 0$  gilt somit für alle Lochpunkte und für alle Punkte, für die Strömungsdaten aus anderen Gittern interpoliert werden. Die Berücksichtigung des Wertes von *IBLANK* erfolgt bei

einem rein expliziten Lösungsverfahren ohne Mehrgitterbeschleunigung ausschließlich bei der Addition des Residuums zu der alten Strömungslösung, indem das Residuum mit *IBLANK* multipliziert wird. Für das Runge-Kutta-Zeitintegrationsverfahren nach Gl. (2.48) lautet die entsprechende Modifikation

$$\vec{W}_{i,j,k}^{(s)} = \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} - IBLANK \cdot \alpha_s \frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{(s-1)} \quad , \quad s = 1 \dots r \quad . \quad (3.1)$$

## 3.2 Implementierung des Chimären-Verfahrens

Die Implementierung eines Chimären-Verfahrens kann in mehrere Schritte unterteilt werden: Zunächst ist ein Algorithmus erforderlich, mit dem die Lochzellen definiert werden. Die entsprechende Vorgehensweise wird in Kapitel 3.2.1 beschrieben. Anschließend müssen geeignete Spenderzellen für die Interpolation von Strömungsdaten gesucht und die Interpolationskoeffizienten ermittelt werden. Auf diese Thematik wird in Kapitel 3.2.2 eingegangen. Als notwendige Ergänzung wird in Kapitel 3.2.3 gezeigt, wie zur Vermeidung von Interpolationsfehlern die Berechnung der Interpolationskoeffizienten bei sich auf Körperoberflächen überlappenden Netzen angepasst werden muss. Die für Chimären-Rechnungen nötigen Erweiterungen des in dieser Arbeit verwendeten Verfahrens zur Lösung der Strömungsgleichungen werden schließlich in Kapitel 3.2.4 beschrieben. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Anpassung der impliziten Operationen sowie des Mehrgitter-Algorithmus. Die Chimären-Technik ermöglicht auch eine einfache Berechnung von instationären Strömungen um sich relativ zueinander bewegend Körper. Die hierfür erforderlichen Erweiterungen des Strömungslösers werden in Kapitel 3.2.5 dargestellt. Kapitel 3.2.6 gibt schließlich eine Übersicht über die zur Parallelisierung des Chimären-Verfahrens erforderlichen Schritte.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Chimären-Technik in FLOWer wesentlich weiterentwickelt. Als wichtigste Neuerungen gegenüber dem in Kapitel 1.4.2 beschriebenen Ausgangsverfahren wurde ein neuer Suchalgorithmus implementiert, ein Korrekturverfahren bei Netzüberlappungen auf Körperoberflächen entwickelt, die Verkettung von Bewegungen bei instationären Rechnungen ermöglicht und eine parallelisierbare Datenstruktur eingeführt. Zusätzlich wurde die Bedienung der Chimären-Technik vereinfacht, ihre Zuverlässigkeit erhöht und die Ablaufgeschwindigkeit deutlich gesteigert. Von dem ursprünglichen Ausgangsverfahren blieben in überarbeiteter Form die Methode zur Lochdefinition, ein spezieller Suchalgorithmus für kartesische Netze und die Vorgehensweise bei nicht ausreichender Netzüberlappung erhalten.

Im Vergleich zu der in Kapitel 1.4.1 vorgestellten Methode von Parks et al. [76] und Suhs et al. [103] zur Berechnung der Interpolationskoeffizienten bei Netzüberlappungen auf Körperoberflächen erfordert die hier beschriebene Vorgehensweise keine Veränderung der Rechengitter. Die bei instationären Strömungssimulationen notwendige Berücksichtigung der veränderlichen Lochform bei der Definition der Interpolationpunkte ist ebenfalls in der Literatur nicht bekannt.

### 3.2.1 Lochdefinition

Der erste Schritt bei einer Chimären-Rechnung ist das Ausblenden von Netzzellen, die sich im Innern eines Körpers befinden. Bei dem in dieser Arbeit genutzten Vorgehen werden dazu vom Anwender für jeden Körper ein oder mehrere Netze erstellt, die den Körper vollständig überdecken. Die Netze werden im Folgenden „Lochdefinitions-gitter“ genannt. Alle Zellmittelpunkte der Rechengitter, die den Körper überlappen, werden nun daraufhin getestet, ob sie sich innerhalb des Lochdefinitions-gitters befinden. Gegebenenfalls werden die entsprechenden Zellen ausgeblendet ( $IBLANK = 0$ ) und von der Strömungsberechnung ausgenommen, siehe Bild 3.3.

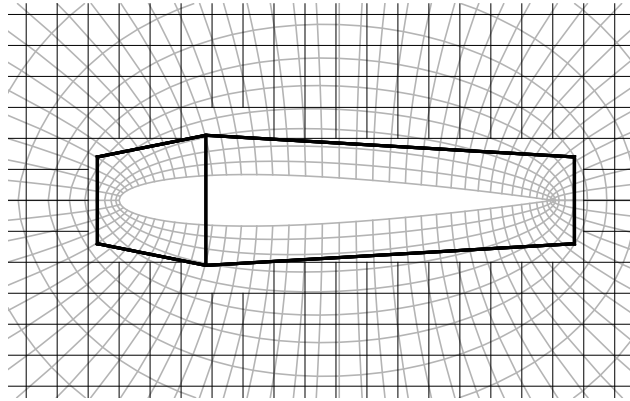


Bild 3.3: Lochdefinition mit Hilfsgitter

Die Bestimmung der auszubblendenden Zellen erfolgt zur Minimierung der Rechenzeit in mehreren Schritten: Zunächst wird überprüft, ob sich das Zentrum der gegebenen Zelle innerhalb eines Quaders befindet, der das gesamte Lochdefinitions-gitter umgibt. War dieser Test erfolgreich, dann werden alle Zellen des Lochdefinitions-gitters identifiziert, deren umschließender Quader das Zellzentrum der zu prüfenden Zelle beinhaltet. Nur für diese Zellen des Lochdefinitions-gitters wird schließlich ein exakter Test durchgeführt, ob sie das Zellzentrum beinhalten. Dazu wird entsprechend der von Pahlke [75] gewählten Vorgehensweise die Zelle in sechs Tetraeder aufgeteilt, siehe Bild 3.4, links, und getestet, ob sich das Zellzentrum in einem der Tetraeder befindet.

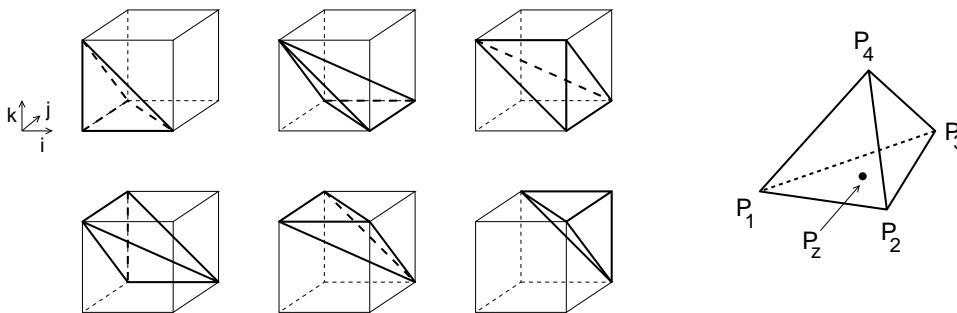


Bild 3.4: Unterteilung einer Zelle in Tetraeder und Bezeichnung der Ecken eines Tetraeders

Dies erfolgt durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\gamma_1 (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \gamma_2 (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) + \gamma_3 (\vec{x}_4 - \vec{x}_1) = \vec{x}_z - \vec{x}_1, \quad (3.2)$$



wobei  $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_4$  die Eckkoordinaten eines Tetraeders bezeichnen und  $\vec{x}_z$  das Zentrum der zu prüfenden Zelle, vgl. Bild 3.4, rechts. Sofern für die Koeffizienten  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$ ;  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq 1$  gilt, befindet sich das Zellzentrum im Innern des Tetraeders und die Zelle ist auszublenden.

Ein Lochdefinitionsgitter besteht im Allgemeinen aus einer bis ca. 1000 Zellen. Wegen der geringen Zellenzahl ist die für die Lochdefinition benötigte Rechenzeit klein im Vergleich zur Dauer eines Iterationsschritts bei der Lösung der Strömungsgleichungen, so dass der Einsatz eines höherwertigen Suchverfahrens nicht erforderlich ist.

Für die Hilfszellen an den Berandungen der Blöcke muss ebenfalls ermittelt werden, ob sie auszublenden sind. Je nach Randbedingung ist dabei ein unterschiedliches Vorgehen erforderlich: Bei Blockübergängen werden in der ersten bzw. zweiten Hilfschicht dieselben Zellen ausgeblendet, wie in der ersten bzw. zweiten inneren Zellschicht des benachbarten Netzblocks. Bei allen anderen Randbedingungen wird der Wert von *IBLANK* in den Hilfszellen aus der nächsten ersten inneren Zelle kopiert.

Im weiteren Verlauf einer Chimären-Rechnung werden an den Lochrändern Strömungsdaten aus anderen Gittern interpoliert. Daher hat die Größe und Form der Lochdefinitionsgitter einen wichtigen Einfluss auf den Interpolationsfehler. Beispielsweise sollten die Gitter etwas größer als die tatsächliche Körpergröße gewählt werden, damit nicht in Gebieten mit hohen Gradienten, wie zum Beispiel Grenzschichten oder Verdichtungsstößen, interpoliert wird.

Im Rahmen dieser Arbeit haben sich zwei Vorgehensweisen für die Erstellung von Lochdefinitionsgittern bewährt: Bei einfachen Körpergeometrien bestehen die Lochdefinitionsgitter häufig aus weniger als zehn Netzzellen, so dass die Koordinaten manuell festgelegt werden können. Bei komplexeren Geometrien bietet es sich dagegen an, aus den Rechengittern die Koordinaten der Körperoberflächen zu extrahieren und auf deren Basis ein oder mehrere das Innere des Körpers ausfüllende Volumengitter zu erstellen. Anschließend wird das Netz etwas vergrößert, indem die Koordinaten der Punkte an der Oberfläche in Richtung der Oberflächennormalenvektoren verschoben werden. Als letzter Schritt sollte das Gitter vergrößert werden, um die für die Lochdefinition benötigte Zeit zu minimieren. Bei der Erstellung der Lochdefinitionsgitter werden keine besonderen Ansprüche an die Netzqualität gestellt. Auch eine beliebige Überlappung der Gitter ist zulässig.

### 3.2.2 Suche nach Spenderzellen und Interpolation

Im Anschluss an die Lochdefinition werden die Zellen ermittelt, für die Daten aus anderen Netzen interpoliert werden müssen. Diese Zellen werden nachfolgend auch „Empfängerzellen“ genannt. Zur Bestimmung der Empfängerzellen an Lochrändern werden alle Zellen identifiziert, bei denen der räumliche Diskretisierungsoperator während der Strömungsberechnung auf Lochzellen zugreifen würde. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Verfahren nach Kapitel 2 sind demnach zwei Schichten mit Empfängerzellen um das Loch herum erforderlich. An Blockrändern mit Chimären-Randbedingung werden die Empfängerzellen durch die Zellen der ersten Hilfschicht und die der ersten inneren Zellschicht gebildet. Dieses von der Vorgabe anderer Randbedingungen abweichende Vorgehen, bei dem Randwerte in der ersten bzw. zweiten

Hilfsschicht vorgegeben werden, erlaubt eine bessere Kontrolle der genauen Position der Empfängerzellen. Die Geometrie der Hilfsschichten ist einem Anwender im Allgemeinen nicht bekannt, da deren Koordinaten erst zu Beginn einer Strömungssimulation durch lineare Extrapolation der Koordinaten aus dem Gitterinneren bestimmt werden. Allen Empfängerzellen wird, wie bereits den Lochzellen, der Wert  $IBLANK = 0$  zugewiesen, damit für sie keine Strömungslösung berechnet wird. Für alle anderen Zellen gilt  $IBLANK = 1$ .

Für die Interpolation von Strömungsdaten müssen nun für die Empfängerzellen geeignete „Spenderzellen“ in den überlappenden Gittern ermittelt werden. Da die Strömungsgrößen den Zellzentren zugeordnet sind, erfolgt die Bestimmung der Interpolationskoeffizienten basierend auf den so genannten dualen Netzen. Diese entstehen durch die Verbindung der Zellzentren des originalen Netzes, siehe Bild 3.5. Wegen

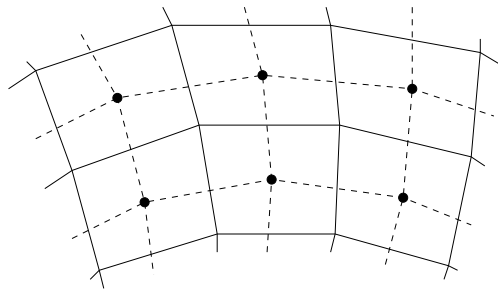


Bild 3.5: Netz (—) und durch Verbindung der Zellzentren (•) entstehendes duales Gitter (- - -)

der beliebigen Form der überlappenden Gitter ist nicht a priori bekannt, welche Spenderzelle des dualen Gitters das im Folgenden „Empfängerpunkt“ genannte Zentrum der Empfängerzelle beinhaltet. Daher ist ein Suchvorgang erforderlich, der in dieser Arbeit alle nicht die Empfängerzelle beinhaltenden Komponenten- und Hintergrundnetze umfasst. Eine vom Anwender vorzunehmende genauere Spezifikation, welche Netze zu durchsuchen sind, ist bei einer großen Anzahl von Blöcken praktisch nicht möglich.

Zur Minimierung der Suchzeit wurde im Rahmen dieser Arbeit ein „Alternating Digital Tree“-Suchalgorithmus (ADT) nach Bonet und Peraire [17] in FLOWer implementiert. Das in Anhang B.2 ausführlich beschriebene Verfahren identifiziert aus einer Menge von  $N$  Objekten alle Objekte, die sich mit einem gegebenen überschneiden. Die Überschneidung wird anhand der minimalen und maximalen Erstreckung der Objekte festgestellt. Zur Speicherung der  $N$  Objekte dient eine baumartige Datenstruktur. Diese ermöglicht das Auffinden der gesuchten Objekte mit einem Aufwand proportional zu  $\log_2 N$  Operationen. Für die bei Chimären-Anwendungen erforderliche Suche nach Spenderzellen werden die minimalen und maximalen Koordinaten der Zellen des Spendergitters in dem ADT-Suchbaum gespeichert, so dass während des Suchvorgangs alle Zellen identifiziert werden, deren umschreibende Quader den Empfängerpunkt beinhalten. Für die getroffene Vorauswahl der Zellen muss anschließend mit einem genauen Testverfahren bestimmt werden, ob sie den Empfängerpunkt beinhalten.

Das ADT-Suchverfahren findet bei Chimären-Anwendungen unabhängig von der Netztopologie immer die gesuchte Spenderzelle und ist damit zum Beispiel einem Sprungalgorithmus (vgl. Kapitel 1.4.1) überlegen. Weiterhin weist es ein sinnvolles

Verhältnis von Speicherplatzbedarf und Zugriffszeit auf. Andere Suchalgorithmen, wie beispielsweise die „Inverse Map“ (vgl. Kapitel 1.4.1), können zwar schneller sein, benötigen aber bei feinen Netzen deutlich mehr Speicherplatz, siehe Benoit und Jeanfavre [11].

Für die genaue Überprüfung, welche der vom ADT-Suchverfahren gelieferte Spenderzelle den Empfängerpunkt tatsächlich beinhaltet, werden die Zellen entsprechend Bild 3.4 in sechs Tetraeder zerlegt und die Koeffizienten gemäß Gl. (3.2) berechnet. Sofern für die Koeffizienten  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$ ;  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq 1$  gilt, befindet sich der Empfängerpunkt innerhalb des Tetraeders.

Die gefundene Spenderzelle des dualen Gitters kann nun zur Interpolation von Daten während der Strömungsberechnung genutzt werden. Wie in Kapitel 3.1 beschrieben, ist dazu eine lineare Interpolationsvorschrift erforderlich. Daher können die nach Gl. (3.2) berechneten Koeffizienten  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  auch zur trilinearen Interpolation von Daten aus den das Tetraeder aufspannenden Zellzentren verwendet werden. Als zusätzliche Bedingung muss dabei für die zur Interpolation verwendeten Zellzentren  $IBLANK = 1$  gelten, da sonst auf Lochzellen bzw. Lochrandzellen zugegriffen wird. Falls der Empfängerpunkt von mehreren Gittern überlappt wird, ergibt der Suchvorgang mehrere mögliche Spenderzellen. In diesem Fall wird zur Interpolation die Zelle mit dem kleinsten Volumen verwendet, da auf feinen Rechengittern im Allgemeinen der Diskretisierungsfehler am geringsten und damit die Strömungslösung am genauesten ist.

Alternativ zu der hier verwendeten Interpolationsmethode auf Basis von vier Zellzentren, können auch alle acht Eckpunkte der dualen Zelle in die trilineare Interpolationsvorschrift einbezogen werden. Für eine beliebig geformte hexaederförmige Zelle ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem, das iterativ gelöst werden muss, siehe z. B. Prewitt et al. [80]. Das Gleichungssystem kann jedoch bei stark deformierten Zellen singulär und somit nicht lösbar werden, so dass der Ansatz in dieser Arbeit nicht verfolgt wird.

Bei Chimären-Rechnungen werden häufig kartesische Netze mit parallel zu den Koordinatenachsen verlaufenden Netzlinien und oftmals nicht-äquidistantem Punktabstand als Hintergrundgitter verwendet. Zum Durchsuchen der Gitter nach einer Spenderzelle kann ebenfalls die ADT-Suchmethode verwendet werden. Besser geeignet für diesen Gittertyp ist aber der nachfolgende, bereits in der Ausgangsversion des Strömungslösers verfügbare Algorithmus aufgrund seiner höheren Ausführungsgeschwindigkeit und des geringeren Speicherplatzbedarfs (vgl. Heinrich [40]). Wegen der parallel zu den Koordinatenachsen verlaufenden Netzlinien der kartesischen Gitter können die  $i, j, k$ -Indizes der Spenderzelle unabhängig voneinander bestimmt werden. Dabei wird als erstes eine äquidistante Netzpunktverteilung angenommen. Für diese können mit Hilfe der Koordinaten des Anfangs- und Endpunkts der Netzlinie und den Koordinaten des Empfängerpunkts die Indizes der Spenderzelle analytisch berechnet werden. Befindet sich der Empfängerpunkt nicht in der ermittelten Zelle, liegt eine nicht äquidistante Punktverteilung vor. In diesem Fall wird die Spenderzelle mit Hilfe eines Bisektionsverfahrens auf Basis der Netzpunktverteilung ermittelt. Zur Bestimmung der Interpolationskoeffizienten wird die gefundene Netzzelle, wie bereits beschrieben, in sechs Tetraeder zerlegt.

Falls die Überlappung zwischen zwei Netzen nicht ausreichend ist, wird für einen

Empfängerpunkt keine Spenderzelle gefunden. Die erforderliche Nachbesserung der Gitter kann bei komplexen Gittersystemen jedoch sehr aufwändig sein. Daher sollte eine Strömungsberechnung auch bei nicht ausreichender Überlappung möglich sein, wozu für die nichtinterpolierbaren Empfängerpunkte sinnvolle Strömungswerte vorgegeben werden müssen. Zu diesem Zweck werden für jeden nichtinterpolierbaren Empfängerpunkt alle potentiellen Spendernetze nach der Zelle durchsucht, deren Zentrum den geringsten Abstand zu dem Empfängerpunkt hat und für die  $IBLANK = 1$  gilt. Die Strömungswerte der gefundenen Zelle werden nun während der Strömungsberechnung zur Vorgabe von Strömungswerten für die Empfängerzelle benutzt. Die beschriebene Vorgehensweise reduziert die Genauigkeit der Strömungsberechnung, so dass die Zahl der nichtinterpolierbaren Empfängerpunkte gering sein sollte.

### 3.2.3 Netzüberlappung auf Körperoberflächen

In einem Chimären-Gittersystem können sich die Netze auch auf einer Körperoberfläche überlappen, siehe Bild 3.6. In diesem Fall ist das in Kapitel 3.2.2 beschriebene

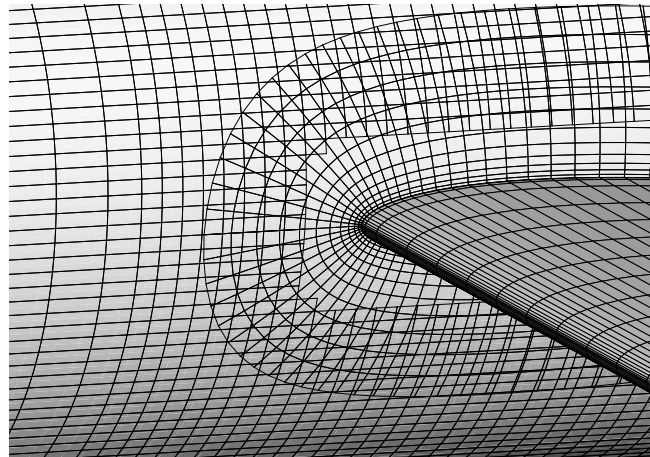


Bild 3.6: Netzüberlappung auf Körperoberfläche (Flügel-Rumpf-Übergang)

Verfahren zur Suche nach einer Spenderzelle und Ermittlung der Interpolationskoeffizienten unzureichend, da die verwendete räumliche Diskretisierung einen räumlichen Fehler der Interpolationskoeffizienten in der Nähe gekrümmter Körperoberflächen verursacht. Der Fehler ist eine Folge der geraden Verbindungslinien zwischen den Netzknoten, die nicht dem gekrümmtem Verlauf der Körperoberfläche folgen. Zur Erläuterung ist in Bild 3.7 ein Schnitt durch zwei überlappende Rechengitter gezeigt, wobei links die originalen Gitter und rechts die für die Berechnung der Interpolationskoeffizienten genutzten dualen Gitter dargestellt sind. Zusätzlich sind in Bild 3.7, rechts die dualen Oberflächengitter  $\mathcal{E}_w$  und  $\mathcal{S}_w$  eingezeichnet, die sich durch die Verbindung der Mittelpunkte der Zellseitenflächen auf der Körperoberfläche ergeben. Für den in Bild 3.7, rechts angegebenen Empfängerpunkt  $\vec{x}_\mathcal{E}$  beträgt der tatsächliche Wandabstand  $d_w$ . Bezogen auf das Empfängergitter beträgt der Wandabstand jedoch  $d_\mathcal{E}$  und in Bezug auf das Spendergitter lautet der Abstand  $d_\mathcal{S}$ , wobei im vorgestellten Fall  $d_w \neq d_\mathcal{E} \neq d_\mathcal{S}$  gilt. Für die genaue Interpolation von Daten ist die Abweichung von  $d_w$  und  $d_\mathcal{E}$  nicht von Bedeutung. Der Unterschied zwischen  $d_\mathcal{E}$  und  $d_\mathcal{S}$  verursacht aller-

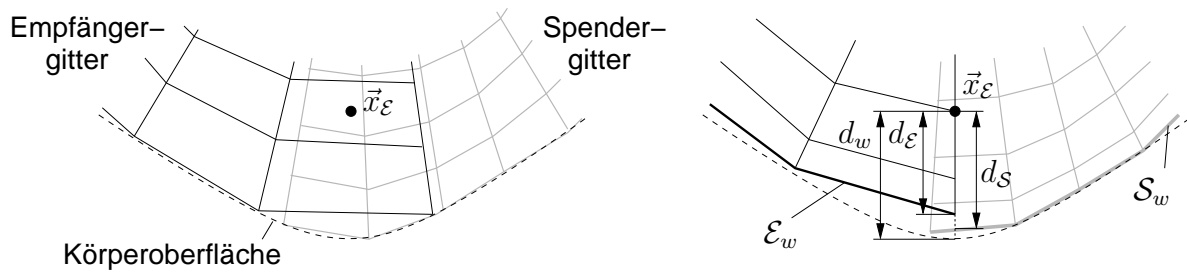


Bild 3.7: Mehrdeutiger Wandabstand für einen Empfängerpunkt  $\vec{x}_\varepsilon$ , links: Schnitt durch Rechengitter, rechts: Schnitt durch duale Gitter

dings einen räumlichen Interpolationsfehler, da die interpolierten Strömungsgrößen für einen anderen Wandabstand gelten, als für den Empfängerpunkt erforderlich. Als Folge können zum Beispiel Fehler bei der Interpolation von Strömungsdaten innerhalb von Grenzschichten entstehen. Bei konvex gewölbten Oberflächen kann sich ein Empfängerpunkt auch außerhalb des Spendergitters befinden, so dass eine Berechnung von Interpolationskoeffizienten nicht möglich ist.

Um die genaue Berechnung der Interpolationskoeffizienten zu ermöglichen, wird ein virtueller Empfängerpunkt  $\tilde{\vec{x}}_\varepsilon$  eingeführt, der durch eine Verschiebung des Empfängerpunkts  $\vec{x}_\varepsilon$  normal zur Körperoberfläche entsteht, siehe Bild 3.8, links. Die Verschiebung wird dabei so gewählt, dass der Abstand  $\tilde{d}_s$  des virtuellen Empfängerpunkts von dem dualen Oberflächengitter des Spendernetzes und der Abstand  $d_\varepsilon$  des originalen Empfängerpunkts von dem dualen Oberflächengitter des Empfängernetzes in Wandnähe identisch sind.

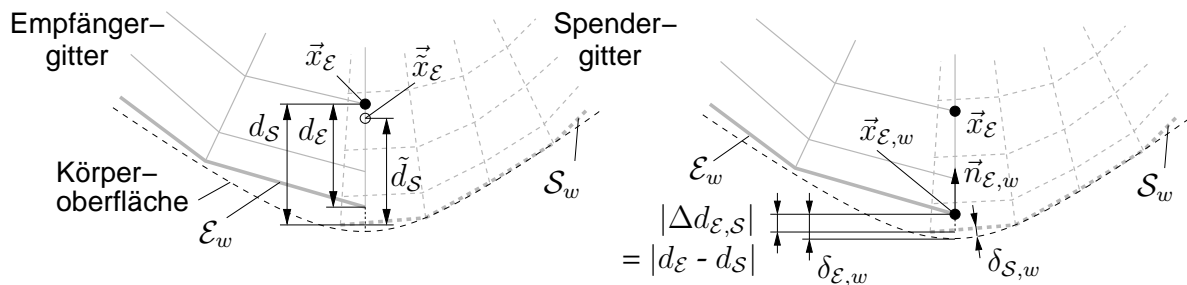


Bild 3.8: Berechnung der Koordinaten des virtuellen Empfängerpunkts, links: Position des virtuellen Empfängerpunkts  $\tilde{\vec{x}}_\varepsilon$ , rechts: Bezeichnungen

Als erster Schritt bei der Berechnung der Koordinaten des virtuellen Empfängerpunkts  $\tilde{\vec{x}}_\varepsilon$  wird für einen gegebenen Empfängerpunkt  $\vec{x}_\varepsilon$  der nächste Punkt des dualen Oberflächengitters des Empfängernetzes  $\vec{x}_{\varepsilon,w}$  ermittelt, siehe Bild 3.8, rechts. Für diesen Punkt wird der Oberflächennormalenvektor  $\vec{n}_{\varepsilon,w}$  bestimmt. Die Koordinaten von  $\vec{x}_{\varepsilon,w}$  werden nun auf das duale Oberflächengitter  $\mathcal{S}_w$  des Spendernetzes projiziert. Da die entsprechende Zelle des Oberflächengitters  $\mathcal{S}_w$  zunächst unbekannt ist, wird sie mit einem ADT-Suchverfahren ermittelt (vgl. Anhang B.2). Für die Vorbereitung der Suche wird den Zellen des Oberflächengitters  $\mathcal{S}_w$  eine endliche Dicke  $2\delta_{s,w}$  zugewiesen, damit die Zellen die tatsächliche Oberfläche beinhalten. Die Berechnungsvorschrift für  $\delta_{s,w}$  ist in Anhang B.3 angegeben. Analog wird auch ein Bereich  $\delta_{\varepsilon,w}$  für die Ablage des Punkts  $\vec{x}_{\varepsilon,w}$  von der Oberfläche ermittelt. Anschließend erfolgt die Speicherung

der minimalen und maximalen Koordinaten der aufgedickten Oberflächenzellen im ADT-Suchbaum. Für den Suchvorgang wird der Wandpunkt  $\vec{x}_{\mathcal{E},w}$  mit einem Quader der Kantenlänge  $2\delta_{\mathcal{E},w}$  umschrieben, so dass dieser einen Teil der Oberfläche beinhaltet und sich auf jeden Fall mit der gesuchten Oberflächenzelle überlappt.

Die mit Hilfe des ADT-Verfahrens ermittelten Zellen des Oberflächengitters  $\mathcal{S}_w$  werden jeweils in zwei Dreiecke zerlegt. Die Orientierung der Dreiecke muss dabei so gewählt werden, wie sie sich auf der Zellseitenfläche bei Zerlegung der angrenzenden Zelle in sechs Tetraeder gemäß Bild 3.4 ergibt. Auf Basis der Eckpunkte eines Dreiecks  $x_1, x_2, x_3$  wird nun eine Ebene gebildet auf die der Punkt  $\vec{x}_{\mathcal{E},w}$  projiziert wird. Der Schnittpunkt der Ebene mit der Projektionsgeraden folgt durch lösen des linearen Gleichungssystems

$$\vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \gamma_1 + (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \cdot \gamma_2 = \vec{x}_{\mathcal{E},w} + \vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \Delta d_{\mathcal{E},S} \quad (3.3)$$

für die unbekannten Koeffizienten  $\gamma_1, \gamma_2, \Delta d_{\mathcal{E},S}$ . Sofern für die Koeffizienten  $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$  gilt, durchdringt die Projektionsgerade das Dreieck. Bei komplex geformten Körpern schneidet die Projektionsgerade gegebenenfalls mehrfach die Körperoberfläche. Daher wird zusätzlich gefordert, dass die Oberflächennormalenvektoren am Punkt  $\vec{x}_{\mathcal{E},w}$  und am projizierten Punkt in dieselbe Richtung zeigen

$$\vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \vec{n}_{\mathcal{S},w} > 0 \quad , \quad (3.4)$$

und dass für den Abstand zwischen den beiden Punkten

$$|\Delta d_{\mathcal{E},S}| \leq \delta_{\mathcal{E},w} + \delta_{\mathcal{S},w} \quad (3.5)$$

gilt, mit den bereits für das ADT-Suchverfahren berechneten maximalen Wandablagen  $\delta_{\mathcal{E},w}$  und  $\delta_{\mathcal{S},w}$ .

Sind alle Bedingungen zutreffend, ist das gesuchte Wandelement des Spendergitters gefunden und der Punkt  $\vec{x}_{\mathcal{E},w}$  kann mit dem Verschiebevektor  $\vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \Delta d_{\mathcal{E},S}$  auf das Wandelement projiziert werden. Der Wandabstand des Empfängerpunkts in Bezug auf das Oberflächengitter des Spendergitters  $\mathcal{S}_w$  ergibt sich somit zu

$$d_S = d_{\mathcal{E}} - \Delta d_{\mathcal{E},S} = |\vec{x}_{\mathcal{E}} - \vec{x}_{\mathcal{E},w} - \vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \Delta d_{\mathcal{E},S}| \quad . \quad (3.6)$$

Damit bei der Dateninterpolation der Wandabstand  $\tilde{d}_S$  des Interpolationspunkts im Spendernetz gleich dem Wandabstand  $d_{\mathcal{E}}$  des Empfängerpunkts im Empfängernetz ist, muss für den virtuellen Empfängerpunkt  $\vec{x}_{\mathcal{E}}$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{d}_S = d_{\mathcal{E}} \quad \text{mit} \quad \tilde{d}_S &= |\vec{x}_{\mathcal{E}} - \vec{x}_{\mathcal{E},w} - \vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \Delta d_{\mathcal{E},S}| \\ d_{\mathcal{E}} &= |\vec{x}_{\mathcal{E}} - \vec{x}_{\mathcal{E},w}| \end{aligned} \quad (3.7)$$

gelten, vergleiche Bild 3.8, links. Daraus folgt

$$\vec{x}_{\mathcal{E}} = \vec{x}_{\mathcal{E}} + \vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \Delta d_{\mathcal{E},S} \quad . \quad (3.8)$$

Die Korrektur soll nur in Wandnähe durchgeführt werden, während bei großen Wandabständen die Koordinaten des Empfängerpunkts und des virtuellen Empfängerpunkts identisch sein sollen. Dies führt auf die endgültige Berechnungsvorschrift für die Koordinaten des virtuellen Empfängerpunkts

$$\vec{x}_{\mathcal{E}} = \begin{cases} \vec{x}_{\mathcal{E}} + \vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \Delta d_{\mathcal{E},S} & \text{falls } 0 \leq |\vec{x}_{\mathcal{E}} - \vec{x}_{\mathcal{E},w}| < d_1 \\ \vec{x}_{\mathcal{E}} + \vec{n}_{\mathcal{E},w} \cdot \Delta d_{\mathcal{E},S} \cdot \frac{d_2 - |\vec{x}_{\mathcal{E}} - \vec{x}_{\mathcal{E},w}|}{d_2 - d_1} & \text{falls } d_1 \leq |\vec{x}_{\mathcal{E}} - \vec{x}_{\mathcal{E},w}| < d_2 \\ \vec{x}_{\mathcal{E}} & \text{falls } d_2 \leq |\vec{x}_{\mathcal{E}} - \vec{x}_{\mathcal{E},w}| \end{cases} \quad . \quad (3.9)$$

Die Wandabstände  $d_1$  und  $d_2$  geben den Anfang bzw. das Ende des linearen Übergangsbereichs von voller zu keiner Verschiebung an. Sie werden in Abhängigkeit vom Betrag der Verschiebung gewählt

$$d_1 = 10 \cdot |\Delta d_{\varepsilon, S}| \quad , \quad d_2 = 30 \cdot |\Delta d_{\varepsilon, S}| \quad . \quad (3.10)$$

Die Koordinaten des virtuellen Empfängerpunkts  $\vec{x}_\varepsilon$  können nun, wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben, zur Berechnung der Interpolationskoeffizienten verwendet werden. Die durchgeführte Korrektur zur genauen Dateninterpolation in Wandnähe ist nur für das betrachtete Spendergitter gültig. Sie muss daher bei mehreren sich überlappenden Gittern für jedes der Spendergitter gesondert durchgeführt werden.

### 3.2.4 Erweiterungen des Lösungsverfahrens

Für Chimären-Rechnungen sind nur geringfügige Anpassungen des in Kapitel 2 beschriebenen Verfahrens zur Lösung der Strömungsgleichungen erforderlich. Wie bereits in Kapitel 3.1 gezeigt, ist für den expliziten Teil des Lösungsverfahrens lediglich bei der Addition des Residuums zu den alten Strömungswerten der Wert von *IBLANK* zu berücksichtigen, vgl. Gl. (3.1).

Für die Anpassung der zur Konvergenzbeschleunigung eingesetzten impliziten Residuenglättung werden vor und nach der Glättung sämtliche Residuen mit *IBLANK* durchmultipliziert. Anschließend wird Gl. (2.54) in unveränderter Form angewendet.

Bei der impliziten Behandlung der Turbulenzgleichungen werden zu Beginn des impliziten Zeitschritts alle Residuen mit *IBLANK* multipliziert. Entsprechend wird auch mit den Zwischenergebnissen des DDADI-Verfahrens vorgegangen.

Sofern die Mehrgitter-Beschleunigungstechnik verwendet wird, müssen auch auf den groben Netzebenen Löcher definiert werden. In FLOWer werden dazu alle Zellen eines groben Gitters ausgeblendet, bei denen die Restriktions- oder Interpolationsoperatoren auf eine oder mehrere Lochzellen des nächst feineren Netzes zugreifen. Analog zum Vorgehen auf dem feinsten Gitter dienen zur Vorgabe von Randbedingungen zwei Schichten von Lochrandzellen um die Löcher herum, sowie an Blockrändern die Zellen der ersten inneren Zellschicht und die der ersten Hilfsschicht. Für alle Loch- und Randzellen wird  $IBLANK = 0$  gesetzt. Die Vorgabe von Strömungswerten für die Lochrand- und Blockrandzellen erfolgt durch Interpolation der entsprechenden Daten aus dem nächst feineren Netz, wobei die Blockrandzellen in der ersten Hilfsschicht ausschließlich Daten aus der ersten Hilfsschicht des feineren Gitters erhalten. Alternativ können auch für die groben Gitter Daten aus einem überlappenden Gitter interpoliert werden. Diese Vorgehensweise wurde bereits in der ursprünglichen Version von FLOWer genutzt. Allerdings nimmt bei gröber werdenden Gittern die Zahl der Zellen im Überlappungsgebiet ab, so dass nichtinterpolierbare Zellen die Folge sein können. Daher wird das letztere Vorgehen in dieser Arbeit nicht genutzt. In der Literatur werden weitere Möglichkeiten zur Vorgabe von Randwerten auf den groben Netzebenen diskutiert: Baysal et al. [5] interpolieren auch für die groben Netzebenen Werte aus dem überlappenden feinsten Gitter, wodurch sich die Problematik der abnehmenden Überlappungsweite an Lochrändern zwar vermindert, sie aber nicht gänzlich vermieden wird. Juvigny et al. [51] verwenden eine Extrapolation von Randwerten aus dem

Inneren des Strömungsgebiets. Allerdings zeigt sich im Vergleich mit einer Interpolation eine Verringerung der Konvergenzgeschwindigkeit.

Während der Strömungsberechnung werden auf den groben Gitterebenen die „forcing function“ und die berechneten Residuen mit *IBLANK* multipliziert, so dass keine neue Strömungslösung in ausgeblendeten Zellen berechnet wird. Damit bei der Prolongation der Grobgitterkorrekturen die Strömungsdaten des feineren Gitters nicht verfälschen, werden die Korrekturen vor und nach der Prolongation in den ausgeblendeten Zellen gleich Null gesetzt.

### 3.2.5 Relativ zueinander bewegte Netze

Die Chimären-Technik ermöglicht wegen der beliebigen Überlappung der Netze eine unabhängige Positionsänderung einzelner Komponentengitter. Wie bereits in Kapitel 1.3 beschrieben, kann diese Eigenschaft für die zeitgenaue Simulation einer Strömung um relativ zueinander bewegte Körper ausgenutzt werden. Dabei ist wegen der sich ändernden räumlichen Lage der Körper vor jedem physikalischen Zeitschritt eine Neudefinition der Löcher sowie eine erneute Berechnung der Interpolationskoeffizienten erforderlich. Hierfür können die in Kapitel 3.2.1 bis Kapitel 3.2.4 beschriebenen Vorgehensweisen unverändert übernommen werden. Lediglich bei der Definition der Lochrandpunkte wurde im Rahmen der Arbeit eine Ergänzung vorgenommen: In die Berechnungsvorschrift der dualen Zeitschrittmethode nach Kapitel 2.2.8 gehen abhängig von der zeitlichen Genauigkeit des Verfahrens die Strömungsgrößen eines oder mehrerer vorheriger Zeitschritte ein. Dabei muss sichergestellt sein, dass eine betrachtete Zelle mit *IBLANK* = 1 auch zu den verwendeten vorherigen Zeitpunkten keine Lochzelle war. Sonst kann aufgrund der undefinierten Strömungswerte der Lochzellen keine Strömungslösung für den aktuellen Zeitpunkt berechnet werden. Als Beispiel ist in Bild 3.9, links ein eindimensionales Gitter zu den Zeitpunkten  $t-2$ ,  $t-1$  und der aktuellen Zeit  $t$  dargestellt. Durch das Gitter bewegt sich ein Loch mit einer Geschwindigkeit von zwei Zellbreiten pro Zeitschritt nach rechts. Sofern in die Berech-

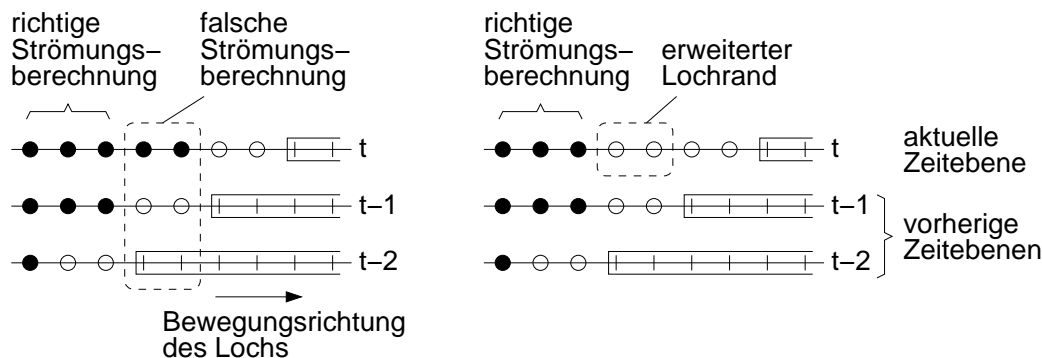


Bild 3.9: Zeitgenaue Strömungssimulation mit eindimensionalem Gitter und veränderlichem Loch, links: teilweise fehlerhafte Strömungsberechnung, da sich einige Zellen zur Zeit  $t-2$  innerhalb des Lochs befanden, rechts: zusätzliche Lochrandzellen ermöglichen korrekte Strömungsberechnung, ● : Zelle mit *IBLANK* = 1, ○ : Lochrandzelle, □ : Lochzellen

nungsvorschrift des dualen Zeitschrittverfahrens die Strömungsdaten der Zeitpunkte  $t-2$  und  $t-1$  eingehen, ist für einige Zellen links vom Loch keine Strömungsbe-



rechnung möglich, da die Zellen zum Zeitpunkt  $t - 2$  Lochzellen waren. Um dieses Problem zu lösen, wird für jede Zelle die Zahl der nutzbaren vorherigen Zeitebenen gespeichert. Falls für die Zeitintegration mehr Zeitebenen erforderlich sind, als zur Verfügung stehen, werden diese Zellen als Lochrandzellen mit  $IBLANK = 0$  definiert und die Strömungsdaten werden aus einem überlappenden Gitter interpoliert, siehe Bild 3.9, rechts.

Die Vorgabe von Gitterbewegungen erfolgte in der Ausgangsversion von FLOWer durch die Definition einer translatorischen und einer rotatorischen Bewegung. Dies schränkte die möglichen Bewegungsformen stark ein, da bei komplexen Bewegungsabläufen häufig mehrere Transformationsschritte nacheinander durchgeführt werden müssen. Aus diesem Grund wurde im Rahmen der Arbeit eine Verkettung von Einzelbewegungen ermöglicht. Dabei kann sich jede Einzelbewegung entweder auf das Inertialsystem oder auf eine andere Einzelbewegung beziehen. Ein Beispiel für die entstehende baumartige Struktur der Bewegungsbeziehungen ist in Bild 3.10 gegeben. Jede

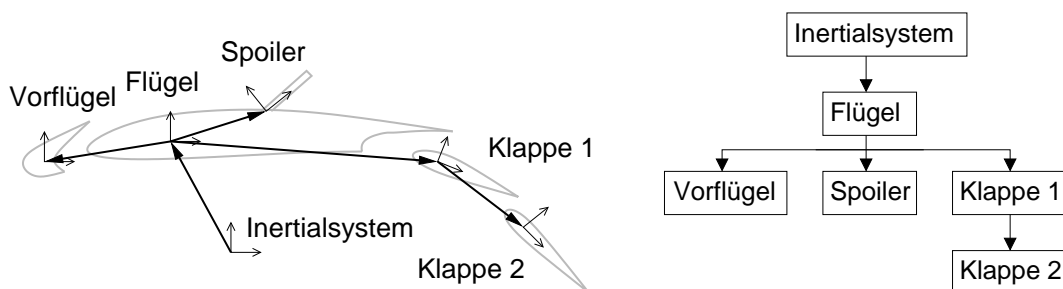


Bild 3.10: Vorgabe der Bewegungen der Klappen und Spoiler eines Flügels

Einzelbewegung erlaubt eine Translation in beliebiger Richtung und eine Rotation um eine beliebige Achse. Die Herleitung der entsprechenden Transformationsbeziehungen ist in Anhang A angegeben. Die instationären Verschiebungen und Drehungen werden in FLOWer als zeitabhängige Fourier- und Polynomreihen vorgegeben.

Bei einer Chimären-Rechnung kann jedem Rechengitter und jedem Lochdefinitions-gitter eine andere Bewegungsform zugewiesen werden. Beim Austausch von Daten zwischen den Gittern sind daher vektorielle Größen, wie Koordinaten und Geschwindigkeiten, entsprechend zu transformieren.

### 3.2.6 Parallelisierung der Chimären-Technik

In der ursprünglich genutzten Version des Strömungslösers FLOWer erfolgte die Parallelisierung ausschließlich auf Basis der CLIC-3D-Bibliothek, vgl. Kapitel 2.2.9. Die CLIC-3D-Bibliothek enthält jedoch keine Funktionen, die den parallelen Ablauf einer Chimären-Rechnung unterstützen. Aus diesem Grund wurden bei der im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Parallelisierung der Chimären-Algorithmen erstmalig direkte Aufrufe der MPI-Bibliothek verwendet. Der resultierende Programmablauf der Lochdefinitions- und Suchalgorithmen ist in Bild 3.11 dargestellt.

Während der Strömungsberechnung erfolgt die Vorgabe von Strömungsdaten für Chimären-Randpunkte im Anschluss an den Datenaustausch für Blockübergänge. Bei Verwendung der Mehrgitterbeschleunigungstechnik wird gegebenenfalls nur auf der

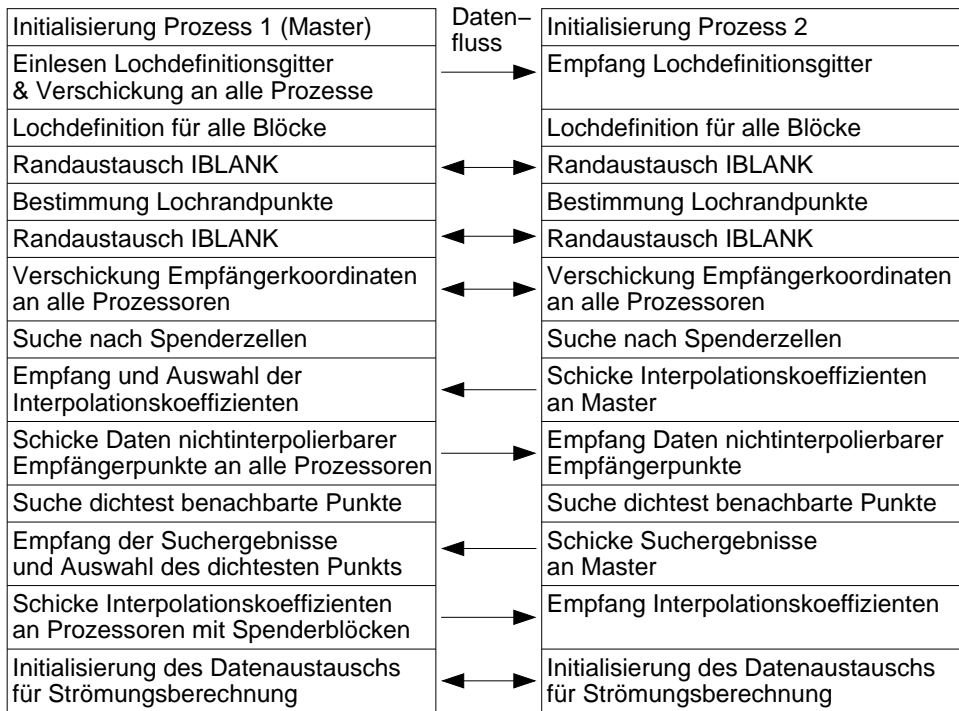


Bild 3.11: Paralleler Ablauf der Lochdefinition und Berechnung der Interpolationskoeffizienten

feinsten Netzebene ein Datenaustausch zwischen den Netzblöcken durchgeführt, vgl. Kapitel 3.2.4.

### 3.3 Berechnung globaler Kräfte und Momente bei Netzüberlappungen auf Körperoberflächen

Bei Chimären-Netzsystemen mit Gitterüberlappungen auf Körperoberflächen ist die Körperoberfläche im Überlappungsbereich doppelt definiert, siehe Bild 3.6, links. Dies führt bei der Berechnung der vom Fluid auf den Körper ausgeübten Kräfte und Momente zu einer doppelten Integration der Kraft- und Momentenanteile in den Überlappungsbereichen. Daher muss für die Berechnung der Kraft- und Momentenbilanzen eine eindeutige Darstellung der Oberfläche ohne Netzüberlappung erstellt werden. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Auswertungsverfahren entwickelt, welches auf Basis der Koordinaten der Oberflächengitter sowie der Werte von *IBLANK* auf der Oberfläche die Überlappung entfernt und den entstehenden Spalt trianguliert, siehe Bild 3.12. Das resultierende Gitter überdeckt die gesamte Körperoberfläche überlappungsfrei. Es kann nun unter Verwendung der von FLOWer ausgegebenen Ergebnisdatei mit den Strömungsdaten auf den Körperoberflächen zur Ermittlung der globalen Kräfte und Momente genutzt werden.

Die Entfernung der Überlappung und die anschließende Triangulierung der entstandenen Spalten müssen bei beliebig geformten Körperoberflächen und mehrfacher Netzüberlappung fehlerfrei funktionieren. Die zu diesem Zweck entwickelten Algorithmen werden in den nachfolgenden zwei Kapiteln 3.3.1 und 3.3.2 beschrieben. Die

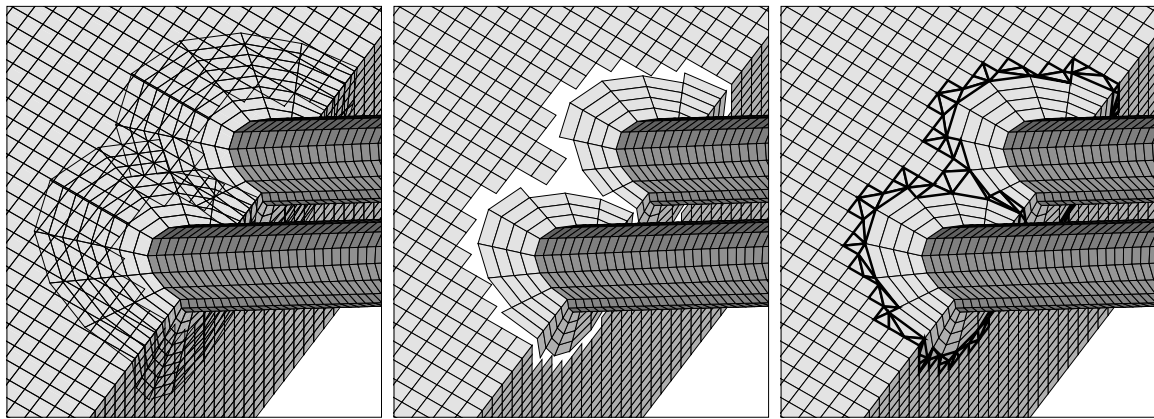


Bild 3.12: Erstellung eines eindeutigen Oberflächengitters am Beispiel der überlappenden Gitter für eine generische Geometrie, die aus einer abknickenden Fläche mit zwei auf der Kante aufgesetzten Zylindern besteht

Berechnung globaler Kräfte und Momente mit Hilfe des resultierenden Oberflächengitters wird in Kapitel 3.3.3 erläutert.

Das vorgestellte Verfahren unterscheidet sich von der in der Literatur bekannten Methode von Chan und Buning [21] durch die Vorgehensweise bei der Triangulierung der Spalten. Chan und Buning verbinden grundsätzlich die Punkte eines Spaltrands mit Punkten des gegenüberliegenden Spaltrands, so dass beim Aufeinandertreffen mehrerer Spalten eine Sonderbehandlung erforderlich ist. Weiterhin können langgestreckte Dreiecke entstehen, welche die Genauigkeit der Kraftberechnung beeinträchtigen. Beide Nachteile vermeidet die im Rahmen dieser Arbeit genutzte Delauny-Triangulierung der Spalten.

### 3.3.1 Entfernung der Überlappung

Der erste erforderliche Schritt für die Entfernung der Überlappung zwischen zwei Oberflächengittern ist die Definition eines Kriteriums, welche von zwei sich überlappenden Zellen auszublenden ist. Zu diesem Zweck wird allen Zellen eine Priorität zugewiesen. Dabei erhalten Zellen des Oberflächengitters entlang der Berandung eines Lochs sowie Zellen, die an Blockränder mit Chimären-Randbedingung angrenzen, die niedrigste Priorität. Anschließend wird allen Zellen des Oberflächengitters eine Priorität zugewiesen, die um eins höher ist als die ihrer Nachbarzellen. Somit haben die Zellen mit zunehmendem Abstand von einem Chimären-Rand eine höhere Priorität. Während der Entfernung der Überlappung wird daher von beiden Gittern eine ähnliche Zahl von Zellschichten entlang der Chimären-Ränder ausgeblendet.

Nach der Bestimmung der Zellprioritäten wird jede nicht ausgeblendete Zelle der Oberflächengitter geprüft, ob sie sich mit einer anderen nicht ausgeblendeten Zelle überlappt. Dies können für eine betrachtete Zelle alle Oberflächenzellen anderer Komponentengitter sein. Um die überlappenden Zellen mit einem effizienten ADT-Suchverfahren nach Anhang B.2 identifizieren zu können, muss den Oberflächenzellen eine endliche Dicke zugewiesen werden. Die Dicke wird dabei wie in Anhang B.3 beschrieben derart berechnet, dass die Zellen die tatsächliche, eventuell gekrümmte

Oberflächenkontur des Körpers beinhalten (vergleiche die Vorgehensweise in Kapitel 3.2.3). Als Ergebnis der Suche mit dem ADT-Verfahren werden alle Oberflächenzellen ermittelt, deren umschreibende Quader sich mit dem umschreibenden Quader der zu prüfenden Zelle überlappen.

Für die gefundenen Zellen muss anschließend ermittelt werden, ob sie sich auf demselben Abschnitt der Oberfläche befinden wie die zu prüfende Zelle oder auf einem anderen, eng benachbart befindlichen Oberflächenabschnitt. Der letzte Fall kann ausgeschlossen werden, sofern sich die Richtungen der Zellnormalenvektoren um weniger als  $45^\circ$  unterscheiden und sofern der Abstand zwischen den Zellen kleiner ist als die den Zellen während der Suche mit dem ADT-Verfahren zugewiesene Dicke.

Um abschließend die Überlappung der Zellen festzustellen, wird die zu prüfende Zelle in zwei Dreiecke zerlegt. Die Eckpunkte der Dreiecke definieren zwei Ebenen, auf die nun die verbliebenen Zellen projiziert werden. Falls sich die projizierte Zelle mit dem Dreieck schneidet, dann überlappen sich die entsprechenden Zellen und die Zelle mit der niedrigeren Priorität wird aus dem Überlappungsgebiet entfernt. Sofern eine gleiche Zellpriorität vorliegt, wird zur Vermeidung ausgefranter Berandungen immer die zu prüfende Zelle ausgeblendet.

### 3.3.2 Triangulierung der Spalten

Nach Entfernung der Überlappung befinden sich zwischen den vormals überlappenden Oberflächengittern Spalten. Sie müssen mit einem Dreiecksgitter überdeckt werden, damit für die Kraftberechnung eine geschlossene Oberfläche entsteht. Falls sich mehrere Gitter auf der Körperoberfläche überlappt haben, kann der Spalt mehrfach verzweigt sein. Die Punkte auf einer Seite des Spalts stammen alle vom gleichen Oberflächengitter und können mit einem in sich geschlossenen Linienzug verbunden werden, siehe Bild 3.13.a. Somit wird jeder Spalt von zwei oder mehr Linienzügen berandet. Als Vorbereitung für die Triangulierung des Spalts werden je zwei der Randlinien über den Spalt hinweg verbunden, bis der Spalt von einem einzigen Linienzug umgeben ist, siehe Bild 3.13.b. Anschließend werden die auf einer Kante der Körperoberfläche befindlichen Punkte der Linienzüge detektiert und entlang der Kanten miteinander verbunden. Dadurch wird der ursprüngliche Linienzug in mehrere neue, ebenfalls in sich geschlossene Linienzüge aufgeteilt, siehe Bild 3.13.c.

Basierend auf den resultierenden Linienzügen wird nun die Triangulierung der Spalten vorgenommen. Dabei stellt sich die Frage nach der optimalen Triangulierung. Eine solche ist nach Hoschek und Lasser [42] durch die Delauny-Triangulierung gegeben. Diese maximiert die Innenwinkel der Dreiecke und vermeidet dadurch lang gestreckte Dreiecke, die zu einer ungenauen Darstellung der Oberfläche führen würden. Eine Delauny-Triangulierung liegt vor, falls innerhalb des Umkreises eines Dreiecks kein weiterer Punkt liegt. Dieses Kriterium gilt exakt nur für ebene Flächen. Es wird in dieser Arbeit jedoch auch für gewölbte Flächen verwendet, da die Krümmung der Flächen bezogen auf die Spaltbreite in vielen Fällen gering ist und die Spalten entlang von Kanten bereits geschlossen wurden.

Zur Konstruktion eines Dreiecks mit Delauny-Eigenschaft werden zwei benachbarte Punkte des Linienzugs entlang des Spaltrands als Grundlinie des Dreiecks ausgewählt.

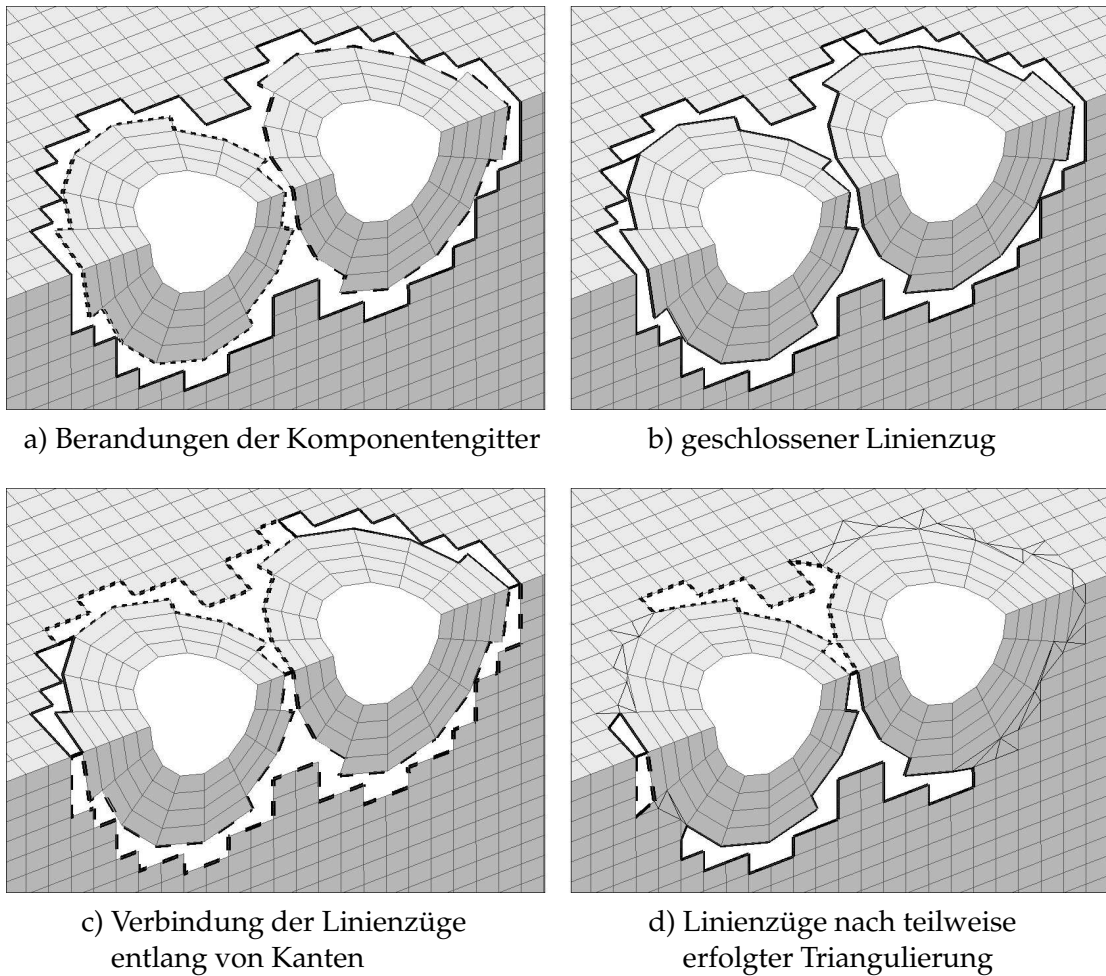


Bild 3.13: Anpassen der Berandung der Spalten, Geometrie entsprechend Bild 3.12, ohne Darstellung der Zylinderoberflächen

Anschließend werden alle Punkte des Linienzugs identifiziert, die mit der Grundlinie zu einem Dreieck verbunden werden können, ohne den Spaltrand zu überschneiden. Für diese Dreiecke werden die Umkreise berechnet. Dabei gilt für den Vektor vom Mittelpunkt der Grundlinie zum Kreismittelpunkt

$$\vec{d}_M = \frac{1}{2} \frac{\vec{a}^2 \vec{b}^2 - \vec{a} \vec{b} \vec{a}^2}{\vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \vec{b})^2} \left( \vec{b} - \frac{\vec{a} \vec{b}}{\vec{a}^2} \vec{a} \right) \quad (3.11)$$

mit

$$\vec{a} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \quad , \quad \vec{b} = \vec{x}_3 - \vec{x}_1 \quad , \quad (3.12)$$

wobei  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$  die Koordinaten der Grundlinie des Dreiecks sind und  $\vec{x}_3$  die Koordinaten der Dreiecksspitze, siehe Bild 3.14. Die Formel resultiert aus der Bedingung, dass sich die Mittelsenkrechten auf den Mittelpunkten zweier Schenkel des Dreiecks im Mittelpunkt des Umkreises schneiden. Für den Radius des Kreises gilt

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} \vec{a}^2 + \vec{d}_M^2} \quad . \quad (3.13)$$

Durch Addition des Betrags von  $\vec{d}_M$  mit dem Kreisradius wird nun die Erstreckung des Kreises in den Spalt hinein berechnet. Dabei ist der Betrag von  $\vec{d}_M$  mit einem negativen

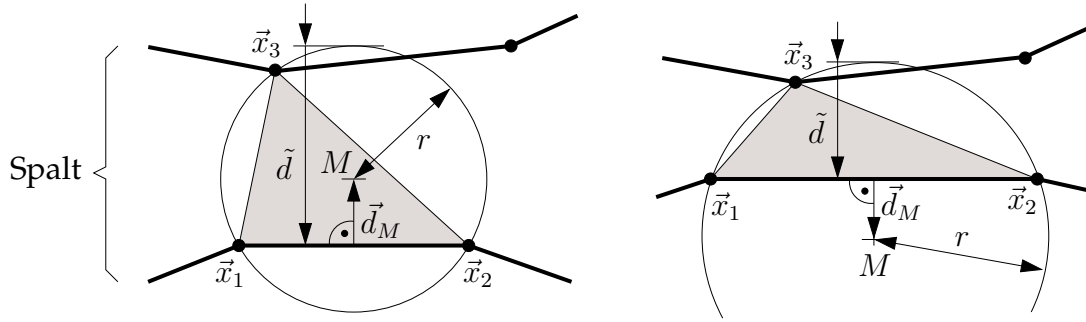


Bild 3.14: Berechnung des Umkreises eines Dreiecks

Vorzeichen zu versehen, falls der Punkt der Dreiecksspitze auf der anderen Seite der Grundlinie liegt als der Umkreismittelpunkt

$$\tilde{d} = \pm |\vec{d}_M| + r, \quad (3.14)$$

vergleiche Bild 3.14. Von allen Dreiecken, die mit den zwei Punkten der Grundlinie und einem weiteren Punkt des Linienzugs gebildet werden, hat das Dreieck mit dem kleinsten Abstandsmaß  $\tilde{d}$  die geringste Erstreckung in den Spalt hinein. Da sein Umkreis keinen weiteren Punkt des Linienzugs enthält und es somit die Delauny-Eigenschaft aufweist, wird es für die Triangulierung des Spalts ausgewählt.

Durch das Einfügen des Dreiecks wird der Linienzug entlang des Spaltrands in zwei neue Linienzüge aufgeteilt. Für die vollständige Triangulierung des Spalts werden iterativ solange weitere Dreiecke gebildet, bis die entstehenden Linienzüge nur noch aus drei Punkten bestehen und somit ebenfalls ein Dreieck bilden, siehe Bild 3.13.d.

### 3.3.3 Kraftberechnung

Als Ergebnis einer Strömungssimulation sind für jede Zelle des originalen, sich überlappenden Oberflächengitters der wirkende Druck und die reibungsbedingten Schubspannungen bekannt. Die Daten sind jeweils den Mittelpunkten der Zellen zugeordnet. Zur Berechnung global wirkender Kräfte wie Auftrieb und Widerstand werden die ermittelten Drücke und Schubspannungen auf die entsprechenden Zellen des in Kapitel 3.3.1 und 3.3.2 erstellten überlappungsfreien Oberflächengitters übertragen. Bei Viereckszellen erfolgt dies durch eine direkte Übernahme der Werte. Für die Bestimmung der Strömungsgrößen an den Mittelpunkten der Dreieckszellen werden zunächst die an den Knoten des originalen Oberflächengitters wirkenden Drücke und Schubspannungen durch Mittelung der Werte der angrenzenden Zellen bestimmt. Die Eckpunkte der Dreieckszellen stimmen mit den Knoten des originalen Gitters überein, so dass die Daten direkt übertragen werden können. Durch eine Mittelung der Eckwerte werden nun die Drücke und Schubspannungen an den Mittelpunkten der Dreieckszellen ermittelt.

Zur Berechnung der global wirkenden Kraft  $[F_x, F_y, F_z]^T$  werden die pro Zelle wirkenden Kraftanteile über alle Dreiecks- und Viereckszellen aufsummiert

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \sum_i \left( -p_i \cdot \vec{n}_i + \begin{bmatrix} \sigma_{w,x} \\ \sigma_{w,y} \\ \sigma_{w,z} \end{bmatrix}_i \right) \cdot S_i, \quad (3.15)$$

wobei der Druck  $p_i$  und die Wandschubspannungen  $[\sigma_{w,x}, \sigma_{w,y}, \sigma_{w,z}]_i^T$  für jede Zelle  $i$  als konstant angenommen werden. Die Variable  $\vec{n}_i$  bezeichnet den Oberflächennormalenvektor der Zelle und  $S_i$  deren Flächeninhalt. Durch eine Koordinatentransformation der globalen Kraft  $[F_x, F_y, F_z]^T$  können nun beispielsweise Auftrieb und Widerstand berechnet werden. Das global wirkende Moment  $[M_x, M_y, M_z]^T$  ergibt sich aus

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \sum_i (\vec{x}_i - \vec{x}_{ref}) \times \left( -p_i \cdot \vec{n}_i + \begin{bmatrix} \sigma_{w,x} \\ \sigma_{w,y} \\ \sigma_{w,z} \end{bmatrix}_i \right) \cdot S_i \quad , \quad (3.16)$$

mit den Koordinaten des Zellmittelpunkts  $\vec{x}_i$  und den Koordinaten des Momentenbezugspunkts  $\vec{x}_{ref}$ .





## 4 Kartesische Hintergrundnetze

Die für Chimären-Rechnungen benötigten Komponentengitter erstrecken sich häufig nur bis zu einem geringen Abstand von der Körperoberfläche weg in das Strömungsfeld hinein. Das verbleibende Rechengebiet muss mit einem Hintergrundnetz überdeckt werden. Wie bereits in Kapitel 1.4.1 beschrieben, sind dazu automatisch generierte, kartesische Mehrblockgitter besonders geeignet. Sehr viel versprechende Ergebnisse werden beispielsweise von Blaylock [14] und Meakin [63, 65] gezeigt. Während die genannten Autoren ausschließlich Hintergrundnetze mit würfelförmigen Zellen verwenden, werden in dieser Arbeit aus den in Kapitel 1.5 genannten Gründen Hintergrundgitter mit anisotropen, also beliebig quaderförmigen Zellen genutzt. Die Entwicklung eines entsprechenden Gittergenerators für Mehrblocknetze mit hängenden Netzknoten wird in Kapitel 4.1 beschrieben. Die Erweiterung des Strömungslösers für die Behandlung hängender Netzknoten wird in Kapitel 4.2 erläutert.

### 4.1 Generierung kartesischer Hintergrundnetze

Aufgrund der in der Literatur bislang nicht genutzten Hintergrundgitter mit anisotropen Zellen ist die Entwicklung einer neuartigen Vorgehensweise bei der Adaption des Gitters an die Komponentengitter erforderlich. Die gewählte Methode wird in Kapitel 4.1.1 vorgestellt. Details des ebenfalls neu entworfenen Geometriesensors werden in Kapitel 4.1.2 erläutert. Das resultierende Mehrblockgitter mit hängenden Netzknoten kann aus sehr vielen Netzblöcken bestehen, die mit einem in Kapitel 4.1.3 beschriebenen Verfahren zu größeren Blöcken zusammengefasst werden.

#### 4.1.1 Der Adaptionalgorithmus

Bei der Entwicklung eines kartesischen Netzgenerators kann auf Erfahrungen aufgebaut werden, die in der Literatur für unstrukturierte, kartesische Gitter verfügbar sind, siehe zum Beispiel die detaillierten Ausführungen von Aftosmis [1] oder Deister [31]. Während jedoch bei unstrukturierten kartesischen Netzen die Größe jeder einzelnen Zelle variiert werden kann, gilt dies bei einem strukturierten Gitter nur für Netzblöcke mit einer gewissen Mindestanzahl von Zellen, beispielsweise  $4 \times 4 \times 4$  oder  $8 \times 8 \times 8$  Zellen. Diese Gitter mit der kleinst möglichen Zellenzahl werden im Folgenden Elementargitter genannt.

Die Erzeugung eines dreidimensionalen, kartesischen Gitters geht von einem einzelnen Elementargitter mit würfelförmigen Zellen aus, welches das gesamte Recheng-

biet überdeckt. Dieses wird iterativ verfeinert und in neue Elementargitter aufgeteilt, bis die resultierenden Zellen eine geforderte Größe haben. Solange das Ausgangsgitter in alle Indexrichtungen gleichermaßen verfeinert wird, sind die Zellen der entstehenden acht neuen Elementargitter würfelförmig. Langgestreckte Zellen entstehen dagegen, wenn die Verfeinerung nur in ein oder zwei Indexrichtungen vorgenommen wird und dementsprechend nur zwei oder vier neue Elementargitter entstehen.

Die Adaption des kartesischen Gitters an die Komponentengitter erfolgt in mehreren Schritten: Zuerst werden alle Zellen der Komponentengitter ermittelt, die sich innerhalb eines Lochdefinitionsgitters befinden, siehe Bild 4.1a. An diese Zellen ist eine Adaption des Hintergrundgitters nicht erforderlich, da die entsprechenden Zellen des Hintergrundnetzes während der Strömungsberechnung ausgeblendet werden. Für die verbleibenden Zellen der Komponentengitter werden mit einem in Kapitel 4.1.2 beschriebenen Geometriesensor die erforderlichen Abmessungen der kartesischen Zellen berechnet. Bei der nun folgenden Adaption des Hintergrundgitters werden alle Elementargitter solange verfeinert, bis die Zellen der Elementargitter die geforderten Abmessungen haben. Dabei wird die Netzfeinheit benachbarter Elementargitter nicht berücksichtigt, so dass abrupte Zellgrößensprünge auftreten können, siehe Bild 4.1b. Aus diesem Grund werden in einem zweiten Schritt die Elementargitter weiter verfei-

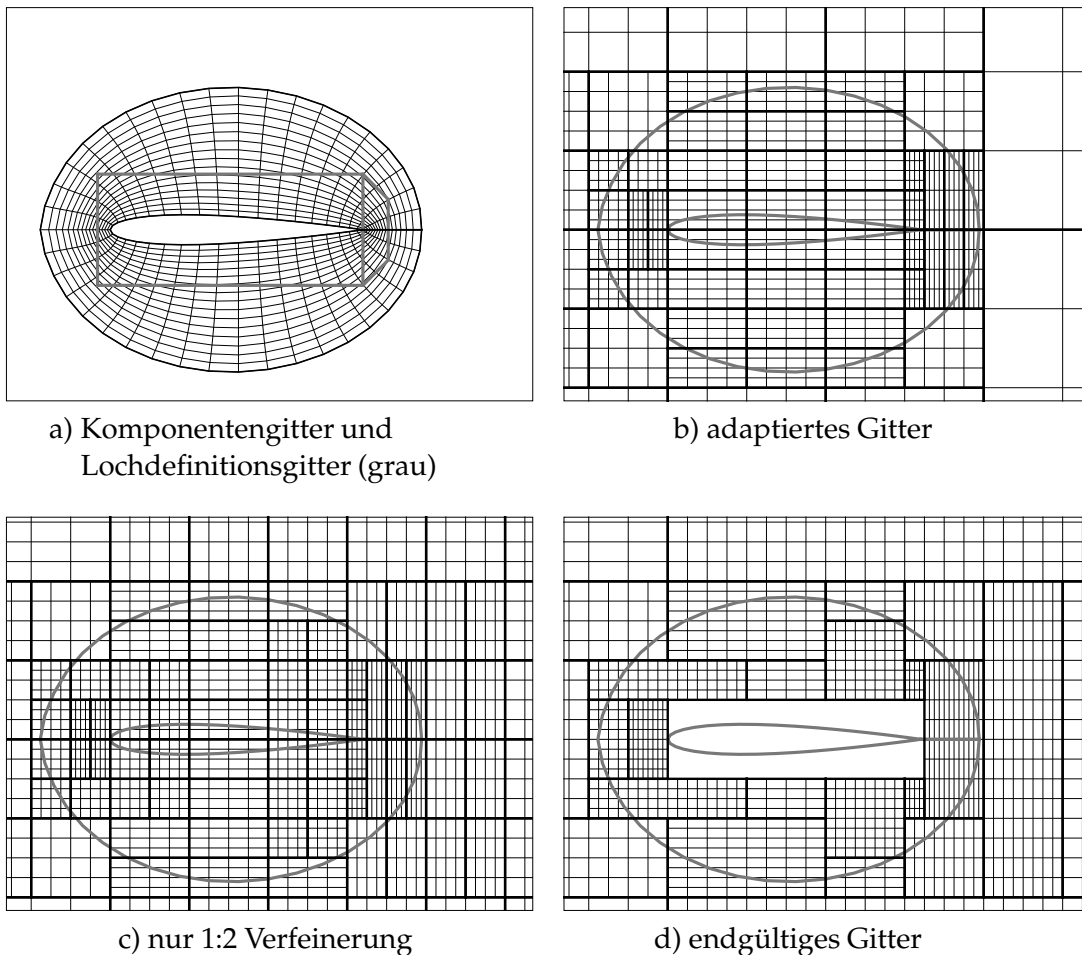


Bild 4.1: Erzeugung eines kartesischen Hintergrundgitters, Blockgrenzen sind durch dicke Linien gekennzeichnet

nert, bis beim Übergang von einem Elementargitter auf ein benachbartes die am feinsten aufgelöste Indexrichtung um den Faktor zwei vergrößert wird, während die Netzfeinheit in den anderen Indexrichtungen identisch ist. Diese Vorgehensweise bewirkt einen schnellen Übergang von anisotropen Zellen zu würfelförmigen, siehe Bild 4.1c.

Die einzelnen Elementargitter werden während der Gittergenerierung auf Basis der minimalen und maximalen Koordinaten ihrer Eckpunkte in einem ADT-Suchbaum nach Anhang B.2 gespeichert. Durch die Vorgabe geeigneter Suchbereiche ermöglicht dieser einen schnellen Zugriff auf die Daten von Elementargittern beliebiger Form, ohne dass explizite Nachbarschaftsbeziehungen bekannt sein müssen. Das für solche Zwecke ebenfalls häufig eingesetzte „Octtree“-Verfahren ist hier nicht geeignet, da es sich nur für die Speicherung würfelförmiger Elementargitter eignet, siehe Berger und Aftosmis [13]. Die Darstellung der Eckkoordinaten der Elementargitter erfolgt mit ganzzahligen Zahlen, deren Verwendung Probleme durch Rechenungenauigkeiten vermeidet. Der Zusammenhang zwischen den ganzzahligen Koordinaten und den tatsächlichen Koordinaten ergibt sich zum Beispiel in x-Koordinatenrichtung durch die Beziehung

$$x = \frac{i}{2^{E_{adapt}}} \cdot (x_{max} - x_{min}) + x_{min} \quad \text{mit} \quad 0 \leq i \leq 2^{E_{adapt}}, \quad (4.1)$$

wobei  $i$  die ganzzahlige Koordinate ist,  $E_{adapt}$  die Zahl der Verfeinerungen bezeichnet und  $E_{adapt} = 0$  für das Ausgangsgitter gilt. Die Koordinaten  $x_{min}$  und  $x_{max}$  geben die minimale und maximale x-Koordinate des Rechengebiets an.

Das resultierende kartesische Hintergrundgitter überdeckt das gesamte Rechengebiet einschließlich aller Körper. Zur Minimierung der Netzpunktzahl des Hintergrundgitters werden alle Elementargitter entfernt, die sich vollständig innerhalb der Lochdefinitionsgitter befinden. Von diesen Elementargittern würden während der Strömungsberechnung sämtliche Zellen ausgeblendet werden, so dass sie keinen Einfluss auf das Rechenergebnis haben.

Die mit der beschriebenen Vorgehensweise erzeugten Gitter können aus über 10000 Elementargittern bestehen. Zur Verkleinerung der Blockanzahl werden benachbarte Netzblöcke mit gleicher Netzfeinheit miteinander verbunden, siehe Bild 4.1d. Dies wirkt sich positiv auf die Rechengeschwindigkeit blockstrukturierter Rechenverfahren aus, da die für den Datenaustausch zwischen den Blöcken erforderliche Zeit abnimmt und die für Vektorrechner wichtige Vektorlänge zunimmt. Das zur Minimierung der Blockanzahl verwendete Verfahren wird in Kapitel 4.1.3 erläutert.

Zum Abschluss der Gittergenerierung werden auf Basis der bekannten Eckkoordinaten der Elementargitter sämtliche Gitterpunkte des Hintergrundnetzes berechnet und es erfolgt die Ausgabe des resultierenden Mehrblocknetzes mit hängenden Netzknoten in eine Datei. Weiterhin werden die von FLOWer benötigten Angaben über die Nachbarschaftsbeziehungen der Netzblöcke ermittelt.

## 4.1.2 Der Geometriesensor

Bei der Adaption des kartesischen Hintergrundnetzes an die Zellgröße der Komponentengitter müssen für jede der beliebig geformten Zellen der Komponentengitter die Abmessungen einer ihr ähnlichen kartesischen Zelle bestimmt werden. Dies erfolgt

mit einem im Rahmen der Arbeit entwickelten Geometriesensor. Für dessen Berechnung wird zunächst die Geometrie einer betrachteten Zelle eines Komponentengitters in eine vereinfachte, quaderförmige Gestalt überführt. Dazu werden die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen der Zelle miteinander verbunden. Von den resultierenden drei Vektoren wird vom zweitlängsten der in Richtung des längsten Vektors zeigende Anteil abgespalten und vom kürzesten Vektor die in Richtung der beiden längeren Vektoren zeigenden Anteile. Die verbleibenden Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  stehen rechtwinklig aufeinander. Sie geben die Geometrie einer vereinfachten, quaderförmigen Zelle an, für deren Kantenlängen

$$\Delta\tilde{x} = |\vec{a}_1| \quad , \quad \Delta\tilde{y} = |\vec{a}_2| \quad , \quad \Delta\tilde{z} = |\vec{a}_3| \quad (4.2)$$

gilt. Eine Ecke der Zelle wird als Ursprung eines zelllokalen Koordinatensystems  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  gewählt, wobei die Richtungseinheitsvektoren des Systems durch

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} \quad ; \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} \quad ; \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} \quad (4.3)$$

gegeben sind. Im Koordinatensystem des Rechengebiets  $x, y, z$  angegebene Richtungsvektoren können mit der Transformationsbeziehung

$$\vec{\tilde{x}} = [\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3]^{-1} \cdot \vec{x} \quad (4.4)$$

in das mit einer Tilde gekennzeichnete zelllokale System überführt werden. Mit Hilfe dieser Beziehung werden nun die Richtungseinheitsvektoren  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  des Koordinatensystems des Rechengebiets in das zelllokale System transformiert. Die resultierenden Vektoren  $\vec{\tilde{i}}_x, \vec{\tilde{i}}_y, \vec{\tilde{i}}_z$  werden in Kugelkoordinaten dargestellt. Dies erfolgt zum Beispiel für den Vektor  $\vec{\tilde{i}}_x = [i_{x,\tilde{x}}, i_{x,\tilde{y}}, i_{x,\tilde{z}}]^T$  durch

$$\tilde{\Theta} = \arccos i_{x,\tilde{z}} \quad , \quad \tilde{\varphi} = \arctan \frac{i_{x,\tilde{y}}}{i_{x,\tilde{x}}} \quad (4.5)$$

Die Kugelkoordinaten  $\tilde{\varphi}, \tilde{\Theta}$  dienen als Eingabeparameter für den Geometriesensor

$$r(\tilde{\varphi}, \tilde{\Theta}) = \Delta\tilde{x}^{\alpha_1(1-\alpha_2)} \cdot \Delta\tilde{y}^{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \cdot \Delta\tilde{z}^{\alpha_2} \quad , \quad (4.6)$$

mit

$$\alpha_1 = \cos^2 \tilde{\varphi} \quad , \quad \alpha_2 = \cos^2 \tilde{\Theta} \quad (4.7)$$

Das Ergebnis  $r(\tilde{\varphi}, \tilde{\Theta})$  ist die erforderliche Erstreckung der Zelle des kartesischen Hintergrundgitters in Richtung des betrachteten Richtungseinheitsvektors, siehe Bild 4.2, links. Nach der Auswertung des Geometriesensors für alle drei Richtungsvektoren  $\vec{\tilde{i}}_x, \vec{\tilde{i}}_y, \vec{\tilde{i}}_z$  sind sämtliche Abmessungen der kartesischen Zelle bekannt.

Der Geometriesensor Gl. (4.6) zeichnet sich dadurch aus, dass das Volumen der vereinfachten quaderförmigen Zelle und das der resultierenden kartesischen Zelle identisch ist. Weiterhin wird die Geometrie einer Zelle nicht verändert, falls ihre Seitenkanten parallel zu den Netzlinien des Hintergrundgitters verlaufen. Schließlich ändert eine Rotation der vereinfachten Zelle um eine der Netzlinien des kartesischen Gitters nicht die Abmessungen der resultierenden Zelle in Richtung der Netzlinie. In Bild 4.2, rechts sind beispielhaft einige kartesische Zellen abgebildet, deren Abmessungen mit dem Geometriesensor für verschiedene gedrehte Zellen ermittelt wurden.

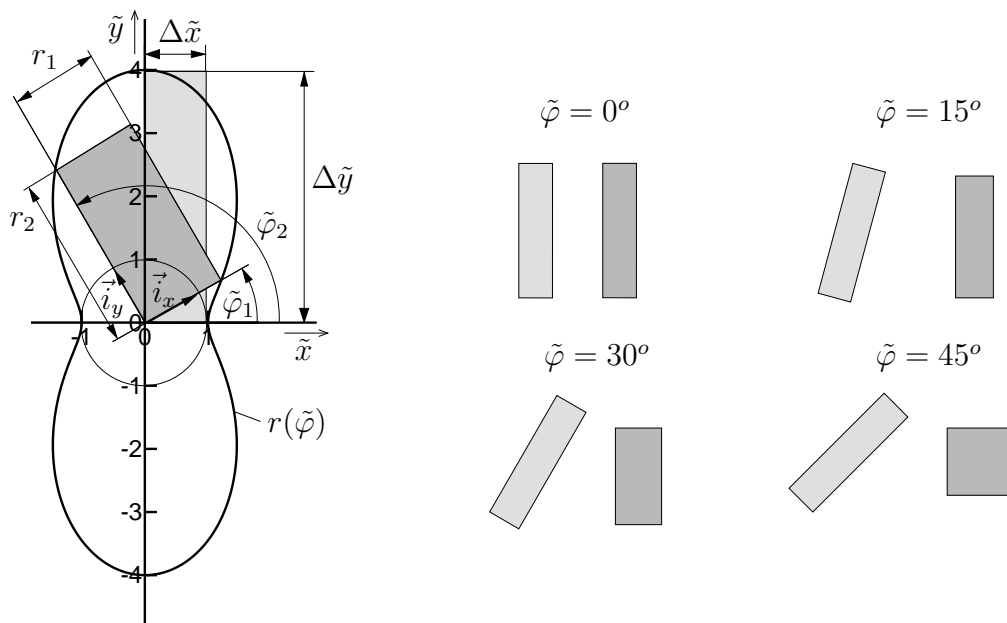


Bild 4.2: Geometriesensor, links: Bezeichnungen, rechts: beispielhafte Zellabmessungen für Originalzelle mit Seitenverhältnis 1:4

### 4.1.3 Verringerung der Zahl der Netzblöcke

Das kartesische Hintergrundgitter besteht nach der Adaption aus sehr vielen einzelnen Elementargittern. Um die Zahl der Netzblöcke zu verkleinern, können benachbarte Blöcke des Hintergrundgitters mit gleich großen Zellen zu neuen Netzblöcken verbunden werden. Die minimal erreichbare Gesamtzahl der Netzblöcke hängt dabei von der Reihenfolge ab, in der die Netzblöcke miteinander vereinigt werden. Wegen der hohen Blockanzahl ist es nicht möglich, in kurzer Zeit sämtliche Reihenfolgen bei der Verbindung einzelner Blöcke auszuprobieren. Daher müssen Verfahren eingesetzt werden, die mit wenig Aufwand die Blöcke so zusammenfassen, dass die resultierende Gesamtzahl der Netzblöcke nahe bei der theoretisch kleinstmöglichen ist. In dieser Arbeit wird zu diesem Zweck die Methode des langsamsten Abstiegs („Method of the Weakest Descend“) von Rigby [85] verwendet. Die Methode basiert auf der Beobachtung, dass es meist mehrere benachbarte Blöcke gibt, mit denen ein gegebener verbunden werden kann. Die Vereinigung mit einem der Blöcke schließt aber aus, dass der entstehende Block anschließend mit einem der anderen verbunden werden kann, da die Blöcke nun nicht mehr mit ihren gesamten Seitenflächen aneinander stoßen. Allerdings können sich für den entstandenen Block neue Verbindungsmöglichkeiten ergeben. Mit der Methode des langsamsten Abstiegs wird versucht, bei jeder Verbindung zweier Blöcke die Zahl der weiteren möglichen Verbindungen zu maximieren, um mit einer maximalen Anzahl an Verbindungsschritten die resultierende Zahl der Netzblöcke zu minimieren.

Das Verfahren untergliedert sich die folgenden Schritte:

1. Ermittlung der Seitenflächen aller Blöcke, an denen zwei benachbarte Blöcke verbunden werden können.
2. Berechnung einer Wertungszahl für alle Seitenflächen, die angibt, wie viele an-

dere Verbindungsmöglichkeiten für die beiden angrenzenden Blöcke durch die Entfernung der Seitenfläche entfallen. Dabei wird die zu entfernende Seitenfläche mitgezählt, so dass die maximale Wertungszahl für zweidimensionale Rechengitter fünf und für dreidimensionale Gitter neun beträgt.

3. Falls die Entfernung einer Seitenfläche neue Verbindungen mit anderen Netzblöcken ermöglicht, wird die Wertungszahl der Seitenfläche um eins verkleinert.
4. Ermittlung der Seitenfläche mit der niedrigsten Wertungszahl. Falls mehrere Seitenflächen dieselbe niedrigste Wertungszahl aufweisen, wird eine von ihnen zufällig ausgewählt.
5. Entfernung der ausgewählten Seitenfläche durch Verbinden der angrenzenden Blöcke.
6. Wiederholung des Algorithmus beginnend bei Schritt 1, bis keine Blöcke mehr miteinander verbunden werden können.

Die einzelnen Schritte des Algorithmus können anhand des in Bild 4.3 gezeigten Beispiels nachvollzogen werden.

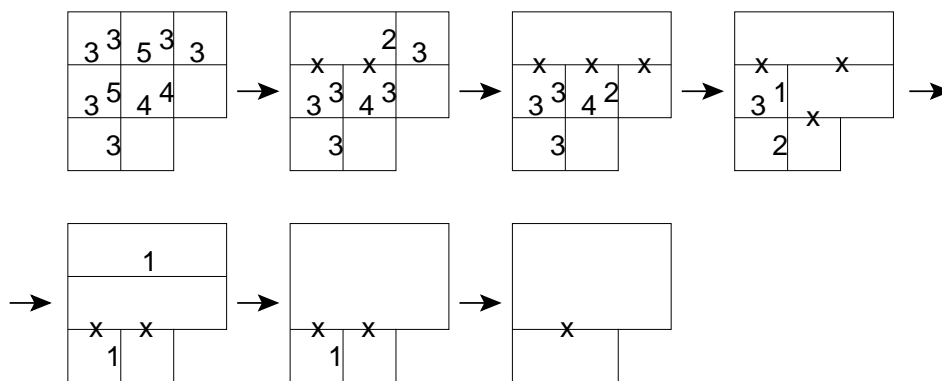


Bild 4.3: Verbinden der Blöcke eines zweidimensionalen Gitters mit der Methode des langsamsten Abstiegs, dargestellt sind jeweils die Bewertungszahlen der Gitterseitenflächen, bei mit × gekennzeichneten Seitenflächen können die angrenzenden Gitter nicht verbunden werden.

Jede Anwendung der Methode des langsamsten Abstiegs kann wegen der zufälligen Auswahl der zu entfernenden Seitenfläche in Schritt 4 zu einer unterschiedlichen resultierenden Blockanzahl führen. Um eine möglichst kleine Zahl an Netzblöcken zu erhalten, muss das Verfahren daher mehrfach für dasselbe Ausgangsnetz durchlaufen werden.

Die Zahl der erforderlichen Anwendungen der Methode des langsamsten Abstiegs bis zum Erreichen eines nahezu unveränderlichen minimalen Werts steigt mit der Anzahl der zu verbindenden Gitter. Um die Zahl der Durchläufe zu verkleinern, wird in dieser Arbeit vor dem Ausführen der Methode des langsamsten Abstiegs ein weiterer Algorithmus zum Verbinden von Blöcken genutzt. Dieser vereinigt benachbarte Elementargitter, falls sie bei der Generierung des kartesischen Hintergrundgitters aus demselben größeren Elementargitter hervorgegangen sind. Der Algorithmus führt zu

einer deutlichen Reduktion der Blockanzahl und hat meist keinen bzw. nur einen geringen Einfluss auf die mit der Methode des langsamsten Abstiegs erreichbare minimale Blockanzahl.

## 4.2 Numerische Behandlung hängender Netzknoten

Um eine Strömungssimulationen auf den erstellten kartesischen Hintergrundgittern durchführen zu können, muss der Strömungslöser die hängenden Netzknoten in geeigneter Weise behandeln. Eine entsprechende Methode war in der Ausgangsversion von FLOWer nicht verfügbar und wurde daher im Rahmen der Arbeit in das Verfahren implementiert. Die entwickelten Algorithmen und deren Parallelisierung werden in den nachfolgenden Kapiteln 4.2.1 und 4.2.2 beschrieben.

### 4.2.1 Implementierung einer Randbedingung für hängende Netzknoten

Bei den in dieser Arbeit verwendeten kartesischen Hintergrundgittern befinden sich die hängenden Netzknoten am Übergang zwischen zwei Blöcken. Die Behandlung der hängenden Netzknoten muss daher in Form einer Randbedingung in den Strömungslöser implementiert werden. Dies erfolgt durch eine Erweiterung der bereits verfügbaren Randbedingung für konventionelle Blockübergänge.

Wie in Kapitel 2.2.6 beschrieben, werden bei einem konventionellen Blockübergang den Netzknoten der ersten bzw. zweiten Hilfsschicht die Koordinaten der ersten bzw. zweiten inneren Netzebene des angrenzenden Blocks zugewiesen. In die Hilfszellen werden während der anschließenden Strömungsberechnung zu Beginn jeder Stufe des Runge-Rutta-Verfahrens die Strömungsdaten der entsprechenden Zellen des benachbarten Blocks übertragen. Diese Vorgehensweise führt bei der Auswertung des räumlichen Diskretisierungsoperators für zwei an einem Blockübergang benachbarte Zellen zur Berechnung desselben Flusses durch die Zellseitenfläche zwischen den Netzblöcken. Der konventionelle Blockübergang ist somit flusskonservativ.

Bei einem Blockübergang mit hängenden Netzknoten verlaufen alle Netzlinien des groben Gitters und ein Teil der Netzlinien des feinen Gitters unterbrechungsfrei von einem Netzblock in den benachbarten. Für solche Netzlinien werden wie bei einem konventionellen Blockübergang die Netzknoten der Hilfsschichten mit den entsprechenden Netzknoten des angrenzenden Blocks gleichgesetzt, siehe Bild 4.4. Die am Blockübergang endenden Netzlinien des feinen Blocks werden dagegen in den groben Block hinein verlängert, so dass die Gitterpunkte der Hilfsschichten in den Ebenen liegen, die durch die erste bzw. zweite Gitterebene des angrenzenden Blocks gebildet werden.

Zur Vorgabe von Strömungswerten in den Hilfszellen während einer Strömungssimulation werden die Strömungsdaten aus dem benachbarten Block interpoliert. Dabei kann ausgenutzt werden, dass die Zentren der Hilfszellen in den selben Ebenen liegen wie die Zentren der Zellen des benachbarten Blocks. Dies erlaubt bei einem dreidimensionalen Rechengitter die Verwendung einer zweidimensionalen Interpoli-

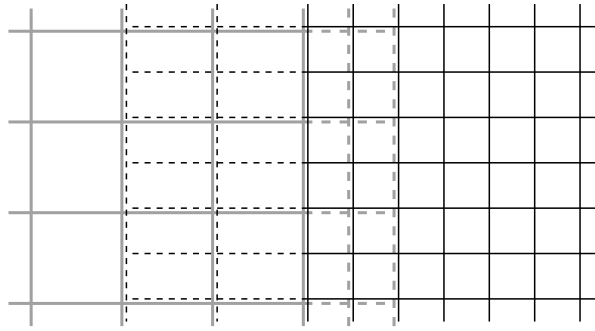


Bild 4.4: Geometrie der Hilfsschichten an Blockübergängen mit hängenden Netzknoten. Die Hilfsschichten sind gestrichelt dargestellt. Zur besseren Veranschaulichung sind die Blöcke leicht versetzt abgebildet.

tionsvorschrift. Die im Rahmen dieser Arbeit genutzte bilineare Interpolationsformel lautet zur Berechnung der konservativen Variablen einer Empfängerzelle  $\vec{W}_\varepsilon$  aus den Strömungsgrößen der umgebenden Zellen  $\vec{W}_S(0, 0), \dots, \vec{W}_S(1, 1)$  des Spendergitters

$$\begin{aligned} \vec{W}_\varepsilon = & (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \cdot \vec{W}_S(0, 0) \\ & + \gamma_1(1 - \gamma_2) \cdot \vec{W}_S(1, 0) \\ & + (1 - \gamma_1)\gamma_2 \cdot \vec{W}_S(0, 1) \\ & + \gamma_1\gamma_2 \cdot \vec{W}_S(1, 1) . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Interpolationskoeffizienten  $\gamma_1, \gamma_2$  können bei den hier betrachteten äquidistanten, kartesischen Gittern analytisch aus dem Verfeinerungsverhältnis berechnet werden. Beispielsweise lautet der Koeffizient  $\gamma_1$  bei einer 1:2 Verfeinerung der ersten Indexrichtung für eine grobe Zelle  $\gamma_1 = 0,5$ , während für eine feine Zelle je nach ihrer Ausrichtung in Bezug auf die groben Zellen  $\gamma_1 = 0,25$  oder  $\gamma_1 = 0,75$  gilt. Die Berechnung der Interpolationskoeffizienten bei nicht kartesischen Gittern gestaltet sich aufwändiger. Die erforderliche Vorgehensweise kann Schwarz [95, 96] entnommen werden.

Die beschriebene Interpolation der Strömungsdaten ermöglicht eine Berechnung der Strömungswerte beiderseits des Blockübergangs mit demselben räumlichen Diskretisierungsoperator, der im Innern des Gitters verwendet wird. Allerdings ist der Blockübergang nicht flusskonservativ, da aufgrund der unterschiedlich feinen Gitter der Fluss durch die Trennfläche zwischen den beiden Gittern nur in der Größenordnung der Diskretisierungsgenauigkeit übereinstimmt. Um ein flusskonservatives Verfahren zu erhalten, werden an dem Blockübergang zunächst die Flüsse durch die Seitenflächen der feineren Zellen berechnet. Der Fluss durch die Seitenfläche einer groben Zelle folgt dann aus der Summe der Flüsse durch die Seitenflächen der angrenzenden feinen Zellen, siehe Bild 4.5. Der Fluss durch die Trennfläche zwischen den Blöcken ist damit für beide Gitter gleich, so dass der Übergang flusskonservativ ist.

Die beschriebene Vorgehensweise wird in FLOWer für alle konvektiven, viskosen und dissipativen Flussanteile sowohl der Hauptströmungsgleichungen als auch der Turbulenzgleichungen angewendet. Bei Nutzung der Mehrgitter-Beschleunigungstechnik ist die Flusskonservativität an hängenden Netzknoten auch auf den groben Gitterebenen gewährleistet.

Als Folge der bilinearen Interpolation der Strömungsgrößen und des abrupten



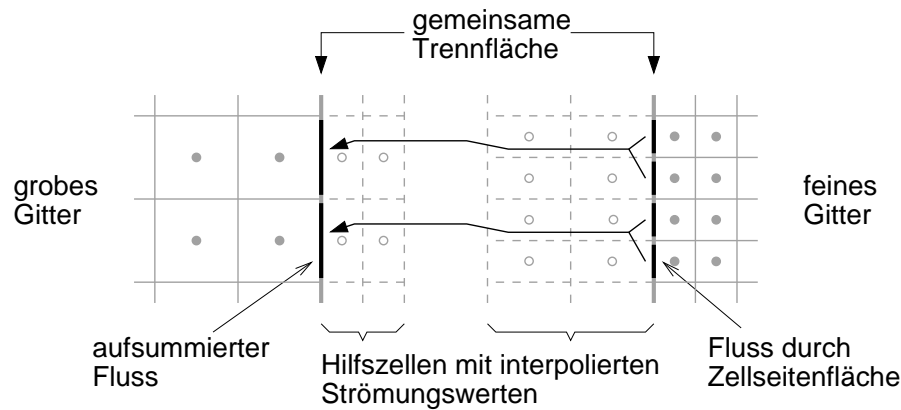


Bild 4.5: Flussberechnung an der Trennfläche des groben Gitters durch Addition der für das feine Gitter ermittelten Flüsse; zur besseren Veranschaulichung sind die an der Trennfläche aneinander stoßenden Blöcke getrennt dargestellt

Größenunterschieds der Zellen an einem Blockübergang mit hängenden Netzknoten reduziert sich die Genauigkeit des räumlichen Diskretisierungsoperators, siehe Durbin und Iaccarino [32] und Radespiel und Swanson [81]. Die in dieser Arbeit durchgeführten Strömungssimulationen zeigen jedoch keinen Einfluss der reduzierten Genauigkeit an den hängenden Netzknoten auf die globale Verfahrensgenauigkeit. Die Begründung für dieses Verhalten ist vermutlich, dass bei einem Gitter mit  $N^3$  Netzknoten die Zahl der hängenden Netzknoten proportional zu  $N^2$  ist, wodurch bei einer Netzverfeinerung die Zahl der hängenden Netzknoten um eine Größenordnung langsamer zunimmt als die Gesamtzahl der Netzzellen. Dadurch wird die Wirkung der lokal reduzierten Genauigkeit auf den globalen Verfahrensfehler ausgeglichen [32].

#### 4.2.2 Parallelisierung hängender Netzknoten

In der Ausgangsversion des Strömungslösers FLOWer wurde der Datenaustausch an konventionellen Blockübergängen bei parallelen Rechnungen mit Hilfe der CLIC-3D-Bibliothek durchgeführt, vgl. Kapitel 2.2.9. Da die CLIC-3D-Bibliothek jedoch keine Funktionen für den Datenaustausch an hängenden Netzknoten bereitstellt, wurde im Rahmen dieser Arbeit der bereits für sequentielle Rechnungen in FLOWer verfügbare Randaustausch parallelisiert. Für die Kommunikation zwischen den Prozessoren wurden dabei MPI-Anweisungen verwendet.

Der Datenaustausch an den Blockübergängen folgt dem folgenden Schema: Zunächst werden die Randdaten aus den Spenderblöcken extrahiert und getrennt nach den Zielprozessoren zwischengespeichert. Die Daten werden anschließend an die Zielprozessoren mit den Empfängerblöcken verschickt und dort erneut zwischengespeichert. Bei Blockübergängen mit hängenden Netzknoten erfolgt nun die Interpolation der Daten. Als letzter Schritt werden die empfangenen bzw. interpolierten Daten in die Hilfszellen des Empfängernetzes kopiert.

Für den Austausch der Flüsse an Blockübergängen mit hängenden Netzknoten werden zunächst entsprechend des in Kapitel 2 beschriebenen Lösungsverfahrens für sämtliche Zellen die Flussbilanzen aufgestellt und die Residuen berechnet. Dabei werden

an Blockübergängen mit hängenden Netzknoten die Flüsse der groben Zellen auf Null gesetzt, während die Flüsse der feinen Zellen extrahiert und zwischengespeichert werden. Die extrahierten Flüsse werden anschließend an die Prozessoren mit den Empfängerblöcken geschickt und zu den Residuen der entsprechenden groben Zellen hinzuaddiert.

## 5 Ergebnisse

In diesem Kapitel wird mit Strömungssimulationen die Genauigkeit und der Anwendungsbereich der Chimären-Technik untersucht. Dazu erfolgt zunächst in Kapitel 5.1 die Definition der Begriffe Verifikation und Validierung. Anschließend werden von den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Verifikationsuntersuchungen in den Kapiteln 5.2 und 5.3.2 zwei Netzkonzvergenzstudien für reibungslose und reibungsbehaftete Profilumströmungen vorgestellt. Sie dienen als Nachweis, dass die Konsistenz und die Genauigkeit des Strömungslösers nicht durch die Verwendung der Chimären-Technik und von Blockübergängen mit hängenden Netzknoten beeinträchtigt werden. Zur Validierung der neuen Techniken werden drei Testfälle mit steigender Komplexität der Netztopologie und der auftretenden Strömungsphänomene betrachtet. Als Testfälle dienen ein Dreielementklappenprofil, ein Hubschrauberrumpf und eine Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration. Die erzielten Ergebnisse werden jeweils mit experimentellen Daten und mit Strömungssimulationen auf konventionellen Rechengitern verglichen.

### 5.1 Verifikation und Validierung

Als Verifikation wird nach [2] der Nachweis bezeichnet, dass ein Verfahren oder ein physikalisches Modell fehlerfrei implementiert ist und im Sinne des vorher überlegten Konzepts konsistente und genaue Ergebnisse liefert. Das Ziel der Validierung ist dagegen die Identifizierung und Quantifizierung der Fehler und Unsicherheiten, welche das Verfahren bzw. Modell im Vergleich zur realen Strömung bewirkt.

Für die Verifikation sind nach [2] Netzkonzvergenzstudien am aussagekräftigsten, da mit ihrer Hilfe der Diskretisierungsfehler der numerischen Lösung bestimmt werden kann. Abweichungen gegenüber dem theoretisch erwarteten Diskretisierungsfehler weisen auf konzeptuelle Unzulänglichkeiten oder Programmierfehler hin. Für eine Netzkonzvergenzstudie wird ausgehend von einem gegebenen Gitter eine Sequenz feinerer Gitter erzeugt und auf jedem der Gitter eine Strömungslösung ermittelt. Bei dem hier betrachteten Strömungslöser FLOWer mit einem räumlichen Diskretisierungsfehler von zweiter Ordnung gilt für einen berechneten Wert  $\tilde{\phi}$  in Abhängigkeit von der Netzschnittweite  $h$  und dem exakten Wert  $\phi$

$$\tilde{\phi} = \phi + \varepsilon \cdot h^2 + O(h^3) \quad , \quad (5.1)$$

mit einem unbekannten Faktor  $\varepsilon$ . Die Netzschnittweite ist bei einem zweidimensionalen Gitter proportional zum reziproken Wert der Wurzel der Netzzellenanzahl  $N$ , so

dass gilt

$$h \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (5.2)$$

Bei hinreichend kleiner Netzschrittweite können die Fehlerterme höherer Ordnung in Gl. (5.1) vernachlässigt werden, so dass sich ein linearer Zusammenhang ergibt

$$\tilde{\phi} \approx \phi + \varepsilon \cdot \frac{1}{N} \quad , \quad N \rightarrow \infty \quad . \quad (5.3)$$

Somit müssen die im Rahmen einer Netzkonvergenzstudie auf hinreichend feinen Netzen ermittelten Werte für  $\tilde{\phi}$  bei Auftragung über  $1/N$  auf einer Geraden liegen.

Durch Extrapolation der berechneten Werte für ein unendlich feines Netz mit  $1/N = 0$  kann der wahre Wert  $\phi$  bestimmt werden. Diese Extrapolation wird Richardson-Extrapolation genannt, siehe Roache [87]. Im Fall einer Verfeinerung des Rechengitters durch Halbierung der Netzschrittweite bzw. Vervierfachung der Netzzellenanzahl gilt

$$\phi \approx \frac{4}{3} \tilde{\phi}_{4N} - \frac{1}{3} \tilde{\phi}_N \quad . \quad (5.4)$$

Die für eine Netzkonvergenzstudie benötigte Sequenz unterschiedlich feiner Gitter wird bei einem strukturierten Strömungslöser im Allgemeinen nicht durch die Verfeinerung eines gegebenen Gitters erstellt. Stattdessen wird wegen des einfacheren Vorgehens, ausgehend von einem sehr feinen Netz, eine Folge gröberer Gitter erzeugt, wobei ein grobes Gitter durch entfernen jeder zweiten Netzlinie aus dem nächst feineren hervorgeht.

Die Validierung eines Verfahrens erfolgt im Anschluss an dessen Verifikation. Für die Validierung werden systematisch numerische Lösungen mit experimentellen Daten verglichen. Allerdings sind Abweichungen unter Umständen schwierig zu interpretieren, da auch die Messdaten mit Unsicherheiten behaftet sein können, oder bei der numerischen Simulation nicht sämtliche Details des Experiments berücksichtigt werden konnten. Die in dieser Arbeit entwickelten Techniken zur Flexibilisierung des Strömungslösers können jedoch auch ohne die Betrachtung von experimentellen Daten validiert werden. Da die physikalische Modellierung der Strömung durch die Verwendung überlappender Gitter oder hängender Netzknoten nicht beeinflusst wird, kann die Validierung der Algorithmen stattdessen durch Vergleichsrechnungen auf konventionellen Rechengittern erfolgen. Sofern die Rechnungen jeweils mit gleichen numerischen Parametern durchgeführt werden, sind abweichende Ergebnisse ausschließlich auf die zusätzlich verwendeten Methoden oder die unterschiedlichen Gittertypen zurückzuführen. Allerdings kann bei dieser Vorgehensweise die physikalische Richtigkeit der Strömungslösungen nicht beurteilt werden. Aus den genannten Gründen werden die in dieser Arbeit erzielten Validierungsergebnisse sowohl mit numerisch auf Referenzgittern ermittelten Lösungen als auch mit Messdaten verglichen.

## 5.2 Netzkonvergenzstudien NACA0012-Profil

Der erste Testfall für die Verifikation der neuen Techniken ist die reibungslose Umströmung eines NACA0012-Profils. Die Profilkordinaten können Jacobs et al. [43]

entnommen werden. Für dieses Beispiel soll anhand von Netzkonzvergenzstudien für eine subsonische Umströmung nachgewiesen werden, dass die Chimären-Technik in Verbindung mit kartesischen Hintergrundblöcken mit hängenden Netzknoten die Genauigkeit des Strömungslösers nicht beeinträchtigt. Anschließend wird ebenfalls mit Netzkonzvergenzstudien bei einer transsonischen Umströmung des Profils der Einfluss der Lage der Interpolationsränder auf die Lösungsgenauigkeit untersucht.

### 5.2.1 Subsonische Profilumströmung

Für die Netzkonzvergenzstudie bei subsonischer Strömungsgeschwindigkeit wurden drei verschiedene Gittertypen verwendet: Zur Erzeugung einer Referenzlösung diente ein konventionelles Einblockgitter mit  $320 \times 64$  Zellen, siehe Bild 5.1, oben, links. Bei dem zweiten Gitter handelt es sich um ein Chimären-Netz, welches sich aus

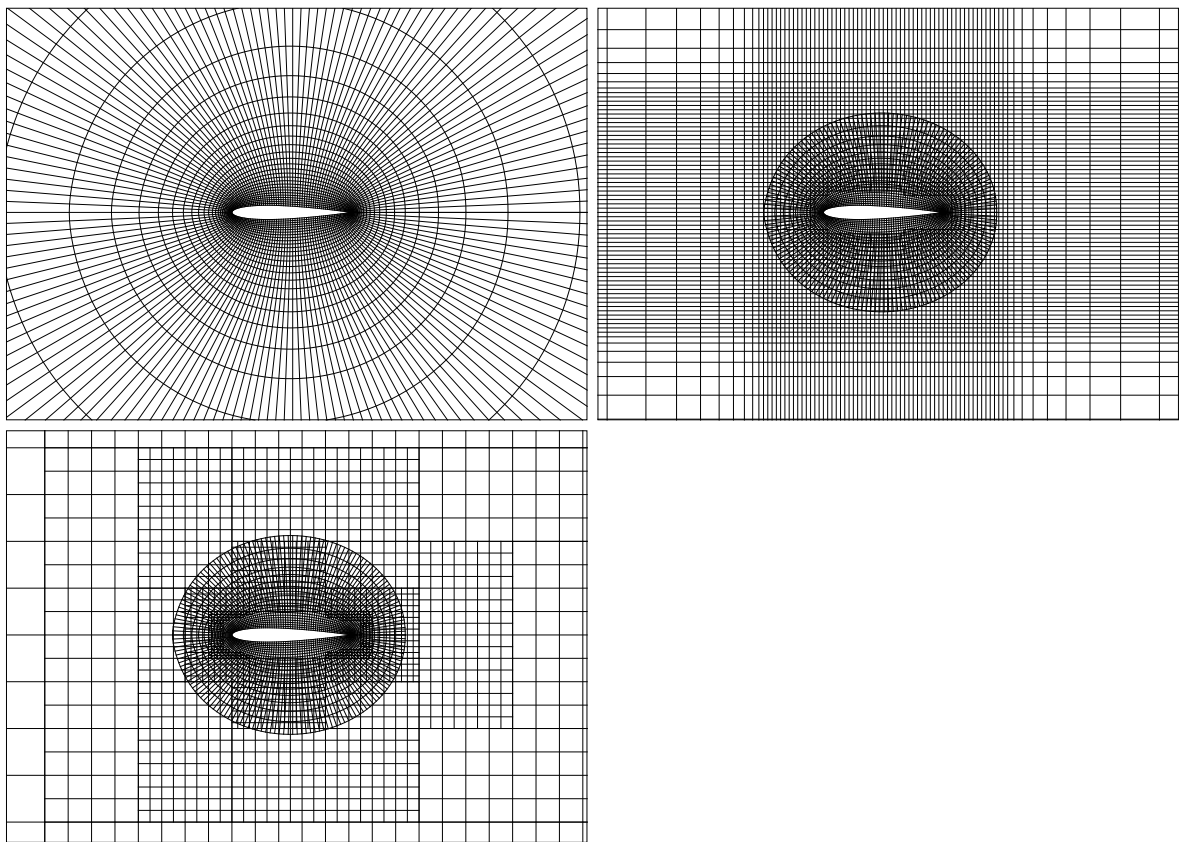


Bild 5.1: Mittelfeine Netze für NACA0012-Profil, oben, links: konventionelles Gitter, oben, rechts: Chimären-Gitter, unten, links: Chimären-Gitter mit hängenden Netzknoten

einem Komponentengitter mit  $320 \times 40$  Zellen und einem kartesischen Einblock-Hintergrundgitter mit  $224 \times 224$  Zellen zusammensetzt, vgl. Bild 5.1, oben, rechts. Das Komponentengitter ist dabei identisch mit dem inneren Bereich des Referenznetzes. Das dritte untersuchte Gitter besteht aus dem Komponentengitter des zweiten Gitters und einem automatisch generierten kartesischen Hintergrundnetz mit hängenden Netzknoten, welches 44 Blöcke mit insgesamt 19072 Zellen enthält, siehe Bild 5.1, unten, links.

Für alle drei Gittertypen wurde eine Netzkonvergenzstudie durchgeführt. Die dazu benötigten mittelfeinen und groben Gitter wurden jeweils durch entfernen jeder zweiten Netzlinie aus dem nächst feineren Gitter erzeugt. Die Anströmbedingungen waren durch einen Anstellwinkel von  $\alpha = 2^\circ$  und eine Anströmmachzahl von  $M_\infty = 0,63$  gegeben. Um die Vergleichbarkeit der berechneten Strömungslösungen zu gewährleisten, wurden für alle Rechnungen dieselben numerischen Parameter verwendet. Als Beispiel für die erzielten Strömungslösungen sind in Bild 5.2 die berechneten Iso-Machlinienverteilungen im Bereich der Profilnase auf den verschiedenen feinen Netzen des Chimären-Netzes mit Mehrblock-Hintergrundgitter dargestellt. Es ist deutlich zu

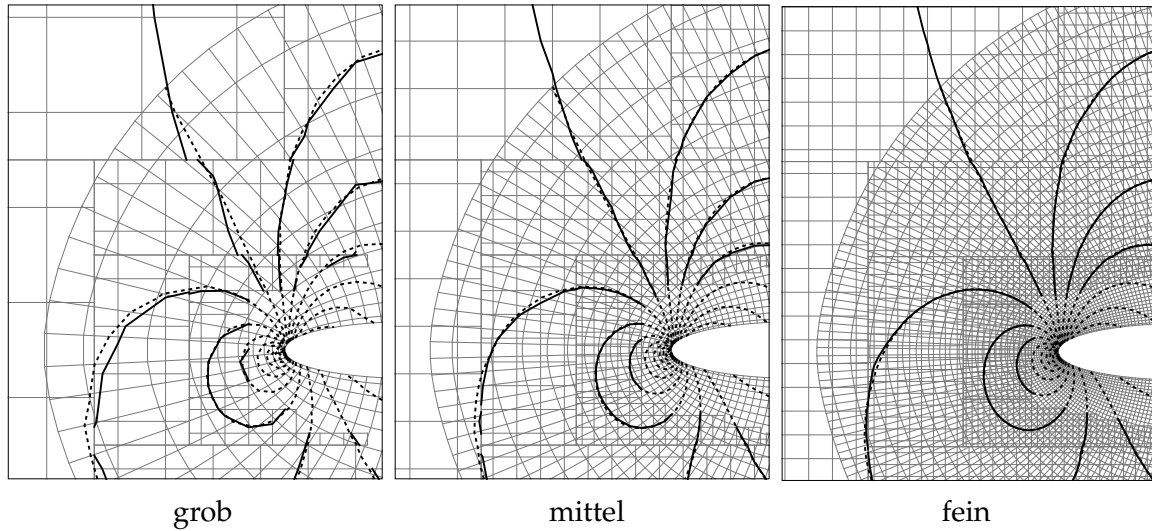


Bild 5.2: Iso-Machlinienverläufe ( $\Delta M = 0,05$ ) für NACA0012-Profil, berechnet mit grobem, mittlerem und feinem Gitter des Chimären-Netzes mit hängenden Netzknoten,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $M_\infty = 0,63$ , - - - : Lösung auf Komponentengitter, — : Lösung auf Hintergrundgitter

erkennen, dass die leicht unterschiedlichen Strömungslösungen auf dem Komponentengitter und dem Hintergrundgitter mit zunehmender Netzfeinheit zu einer identischen Lösung konvergieren.

Für alle Strömungslösungen werden die dimensionslosen Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte  $c_a$  und  $c_w$  des Profils berechnet

$$c_a = \frac{F_A}{\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 S_{ref}} \quad (5.5)$$

$$c_w = \frac{F_W}{\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 S_{ref}} \quad (5.6)$$

wobei  $F_A$  den Auftrieb,  $F_W$  den Widerstand,  $\rho_\infty$  und  $U_\infty = |\vec{q}_\infty|$  die Dichte bzw. die Geschwindigkeit der freien Anströmung und  $S_{ref}$  eine Bezugsfläche bezeichnen. Die sich ergebenden Werte für  $c_a$  und  $c_w$  können Tabelle 5.1 entnommen werden. Die Auftragung der  $c_a$ -Werte über dem reziproken Wert der Gesamtzellenzahl des jeweiligen Rechengitters in Bild 5.3, links zeigt, dass die für einen Gittertyp bestimmten Werte alle näherungsweise auf einer Geraden liegen. Nach Gl. (5.3) ist der räumliche Diskretisierungsfehler somit von zweiter Ordnung. Der nach Gl. (5.4) für ein unendlich feines Netz extrapolierte Auftriebsbeiwert ist für alle Gittertypen fast gleich und beträgt im Mittel  $c_a = 0,3340$ .

| Gittertyp                          |         | Zellenzahl | $c_a$   | $c_w$                  |
|------------------------------------|---------|------------|---------|------------------------|
| konventionell                      | grob    | 1280       | 0,32846 | $1,5285 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | mittel  | 5120       | 0,33315 | $0,2109 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | fein    | 20480      | 0,33388 | $0,0116 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | extrap. | $\infty$   | 0,33412 | —                      |
| Chimären-Netz                      | grob    | 7872       | 0,32508 | $1,8973 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | mittel  | 15744      | 0,33165 | $0,3124 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | fein    | 62974      | 0,33326 | $0,0417 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | extrap. | $\infty$   | 0,33380 | —                      |
| Chimären-Netz mit hängenden Knoten | grob    | 1992       | 0,32429 | $2,0940 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | mittel  | 7968       | 0,33148 | $0,3034 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | fein    | 31872      | 0,33345 | $0,0335 \cdot 10^{-3}$ |
|                                    | extrap. | $\infty$   | 0,33411 | —                      |

Tabelle 5.1: Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für Netzkonvergenzstudie NACA0012-Profil,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $M_\infty = 0,63$

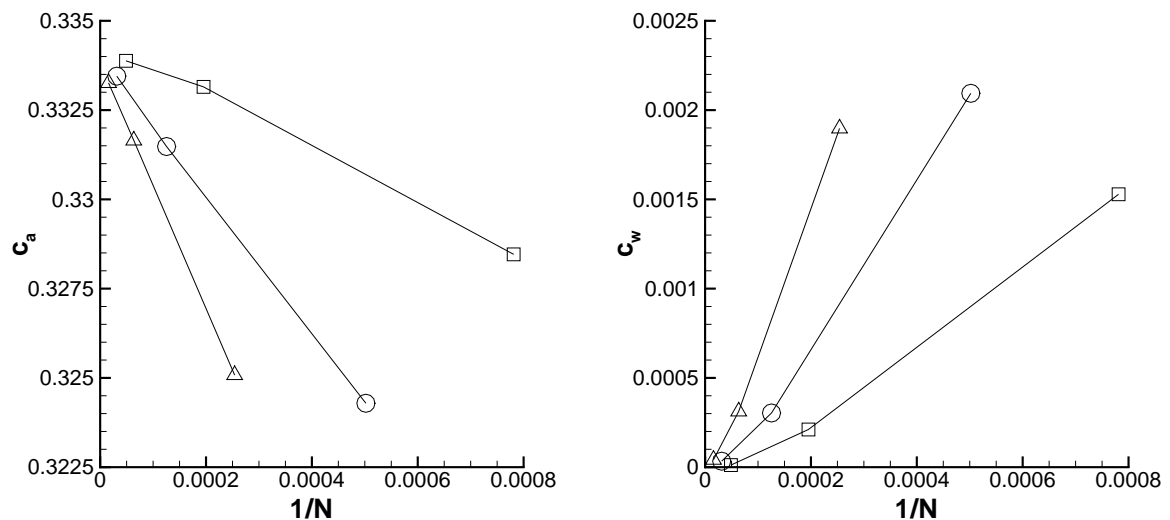


Bild 5.3: Konvergenz der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für reibungslose Umströmung des NACA0012-Profiles,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $M_\infty = 0,63$ ,  $\square$  : konventionelles Gitter,  $\triangle$  : Chimären-Gitter,  $\circ$  : Chimären-Gitter mit hängenden Netzknoten

Der Widerstand eines reibungslos und mit Unterschallgeschwindigkeit umströmten Profils ist gleich Null. Werte ungleich Null werden ausschließlich durch Diskretisierungsfehler verursacht. Wie Tabelle 5.1 entnommen werden kann, konvergiert der Widerstand für alle Gittertypen tatsächlich gegen Null, wobei der Widerstand beim Übergang auf ein feineres Gitter jeweils auf ein sechstel oder weniger abnimmt. Für die Widerstandsberechnung deutet dies auf einen räumlichen Diskretisierungsfehler von 2,6-ter Ordnung oder weniger hin. Deswegen liegen die in Bild 5.3, rechts aufgetragenen Werte für  $c_w$  auch nicht auf einer durch Gl. (5.3) gegebenen Gerade. Eine Richardson-Extrapolation für  $1/N = 0$  ist demnach nicht zulässig.

Die Ergebnisse der Netzkonvergenzstudie bestätigen auch die in Kapitel 1.4.1 getroffene Aussage, dass ein Einblock-Hintergrundgitter zu einer sehr hohen Gesamt-

zellenzahl führt. Verglichen mit dem konventionellen Einblockgitter werden deutlich mehr Netzzellen benötigt, um ähnlich genaue Ergebnisse zu erzielen. Dieses Verhältnis verbessert sich durch die Nutzung des automatisch generierten Mehrblock-Hintergrundgitters. Aber auch dieser Gittertyp erfordert mehr Netzzellen als das konventionelle Gitter, da die ausgeblendeten Zellen innerhalb des Körpers nicht zur Berechnung der Strömung beitragen und die Zellen im Überlappungsbereich doppelt vorhanden sind. Bei dem NACA0012-Profil handelt es sich jedoch um eine Geometrie, für die mit einem konventionellen Einblocknetz eine nahezu optimale Netzkpunktverteilung erreicht werden kann. Weitere Untersuchungen müssen daher zeigen, ob die Erkenntnisse auch für Gitter um komplexe Körper gelten.

### 5.2.2 Transsonische Profilumströmung

Bei einem Chimären-Gitter sollten die Interpolationsränder nicht in Gebieten mit starken Gradienten, wie insbesondere Verdichtungsstößen, verlaufen. Sonst kann die berechnete Strömungslösung verfälscht werden. Dies ist auf die nicht flusskonservative Interpolation der Strömungsdaten und die gegebenenfalls unterschiedliche räumliche Auflösung der Gradienten auf den überlappenden Gittern zurückzuführen. Beispielsweise zeigen Pärt-Enander und Sjögreen [72] sowie Cali [19], dass bei Überschallströmungen die Ausbreitung von Verdichtungsstößen behindert werden kann.

Um den Einfluss der Lage der Chimären-Interpolationsränder bei transsonischen Profilumströmungen zu untersuchen, wird im Folgenden eine Netzkonvergenzstudie für das NACA0012-Profil bei einem Anstellwinkel von  $\alpha = 1^\circ$  und einer Anströmmachzahl von  $M_\infty = 0,85$  durchgeführt. Dazu werden zunächst die in Kapitel 5.2.1 verwendeten Chimären-Gitter ohne bzw. mit hängenden Netzknoten betrachtet. Wie den in Bild 5.4, links, oben bzw. unten dargestellten Iso-Machlinienverteilungen entnommen werden kann, überschneiden die Verdichtungsstöße bei den gewählten Anströmbedingungen die Interpolationsränder oberhalb und unterhalb des Profils. Bei dem Chimären-Netz mit Einblock-Hintergrundgitter ist die Feinheit des Komponentengitters und des Hintergrundgitters im Überlappungsbereich sehr ähnlich. Daher ist ein Einfluss der Interpolation auf den Verlauf der Verdichtungsstöße nicht zu erkennen, siehe Bild 5.4, oben, Mitte. Dagegen ist bei dem Chimären-Gitter mit hängenden Netzknoten das Komponentengitter im Überlappungsbereich feiner als das Hintergrundgitter, so dass die Verdichtungsstöße im Komponentengitter besser aufgelöst sind als im Hintergrundgitter, vgl. Bild 5.4, unten, Mitte. Als Folge der Interpolation wird der im Komponentengitter auf der Profiloberseite berechnete Verdichtungsstoß am Interpolationsrand stark aufgeweitet. Dies verhindert die freie Ausbildung der Strömung und kann zu einem erhöhten numerischen Fehler führen.

Ein für transsonische Strömungen besser geeignetes Gittersystem besteht aus einem Komponentengitter, welches alle Verdichtungsstöße vollständig beinhaltet, während die Netzkpunkte des Hintergrundgitters im Bereich des Stoßes ausgeblendet sind. Dadurch überschneiden die Interpolationsränder den Verdichtungsstoß nicht, so dass Probleme bei der Dateninterpolation vermieden werden. Zur Beurteilung dieses Gittertyps werden auf Basis der bislang genutzten Chimären-Netze zwei neue Gitter erstellt, bei denen die Komponentengitter durch stoßangepasste Gitter ersetzt sind. Für diese Gitter wird ebenfalls eine Netzkonvergenzstudie durchgeführt. Beispiele für die



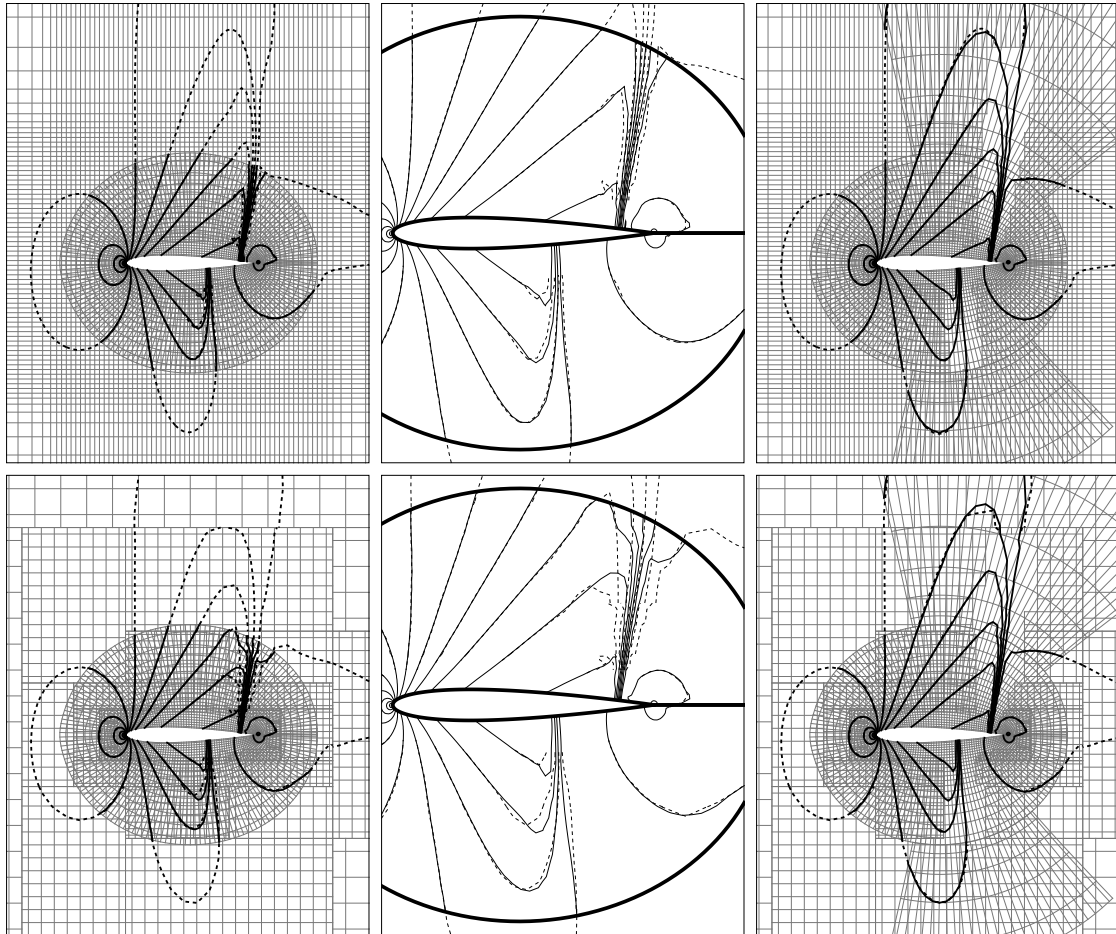


Bild 5.4: Iso-Machlinienverläufe ( $\Delta M = 0,1$ ) für NACA0012-Profil, berechnet auf mittelfeinen Chimären-Gittern, oben: Netze mit Einblock-Hintergrundgitter, unten: Netze mit hängenden Netzknoten, jeweils links: Interpolationsränder schneiden Verdichtungsstöße, jeweils Mitte: Detailansicht des Überlappungsgebiets, jeweils rechts: stoßangepasstes Komponentengitter,  $\alpha = 1^\circ$ ,  $M_\infty = 0,85$ , — : Lösung auf Komponentengitter, - - - : Lösung auf Hintergrundgitter

resultierenden Strömungslösungen sind in Bild 5.4, rechts, oben und unten dargestellt. Die im Rahmen der Netzkonvergenzstudien für die vier Chimären-Gitter berechneten Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte sind in Tabelle 5.2 angegeben. Als Referenzwerte sind zusätzlich die Ergebnisse von Strömungssimulationen mit dem bereits in Kapitel 5.2.1 genutzten konventionellen Gitter eingetragen.

Eine grafische Auftragung der mit den nicht stoßangepassten Chimären-Gittern berechneten Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte im Vergleich zur Referenzlösung ist in Bild 5.5 abgebildet. Es zeigt sich, dass mit zunehmender Netzfeinheit die Beiwerte gegen einen ähnlichen Wert streben. Allerdings liegen die Beiwerte in der gewählten Auftragung über dem reziproken Wert der Gesamtzellenzahl nicht auf einer Geraden, so dass die Genauigkeitsordnung des Verfahrens nicht bestimmt werden kann. Eine Richardson-Extrapolation der Beiwerte für unendlich feine Chimären-Gitter mit Gl. (5.4) ist somit nicht zulässig. Die Ergebnisse bestätigen, dass eine Interpolation im Bereich von Verdichtungsstößen vermieden werden sollte.

| Gittertyp                                    |         | Zellen-<br>zahl                | $c_a$   | $c_w$    | Zellen-<br>zahl                      | $c_a$   | $c_w$    |
|--|---------|--------------------------------|---------|----------|--------------------------------------|---------|----------|
| konventionell                                | grob    | 1280                           | 0,36082 | 0,056891 |                                      |         |          |
|  | mittel  | 5120                           | 0,38397 | 0,058245 |                                      |         |          |
|  | fein    | 20480                          | 0,38879 | 0,058544 |                                      |         |          |
|  | extrap. | $\infty$                       | 0,39040 | 0,058644 |                                      |         |          |
|  |         | einfaches<br>Komponentengitter |         |          | stoßangepasstes<br>Komponentengitter |         |          |
| Chimären-Netz                                | grob    | 3936                           | 0,37778 | 0,059057 | 4022                                 | 0,36537 | 0,056703 |
|  | mittel  | 15744                          | 0,38879 | 0,058679 | 16088                                | 0,38531 | 0,058297 |
|  | fein    | 62976                          | 0,39105 | 0,058739 | 64352                                | 0,38952 | 0,058547 |
|  | extrap. | $\infty$                       | —       | —        | $\infty$                             | 0,39092 | 0,058630 |
| Chimären-Netz<br>mit hängenden<br>Netzknoten | grob    | 1992                           | 0,38018 | 0,056908 | 2078                                 | 0,37750 | 0,055638 |
|  | mittel  | 7968                           | 0,38416 | 0,058082 | 8312                                 | 0,38622 | 0,057796 |
|  | fein    | 31872                          | 0,38974 | 0,058895 | 33248                                | 0,38938 | 0,058567 |
|  | extrap. | $\infty$                       | —       | —        | $\infty$                             | 0,39043 | 0,058824 |

Tabelle 5.2: Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für Netzkonvergenzstudie NACA0012-Profil,  $\alpha = 1^\circ$ ,  $M_\infty = 0,85$

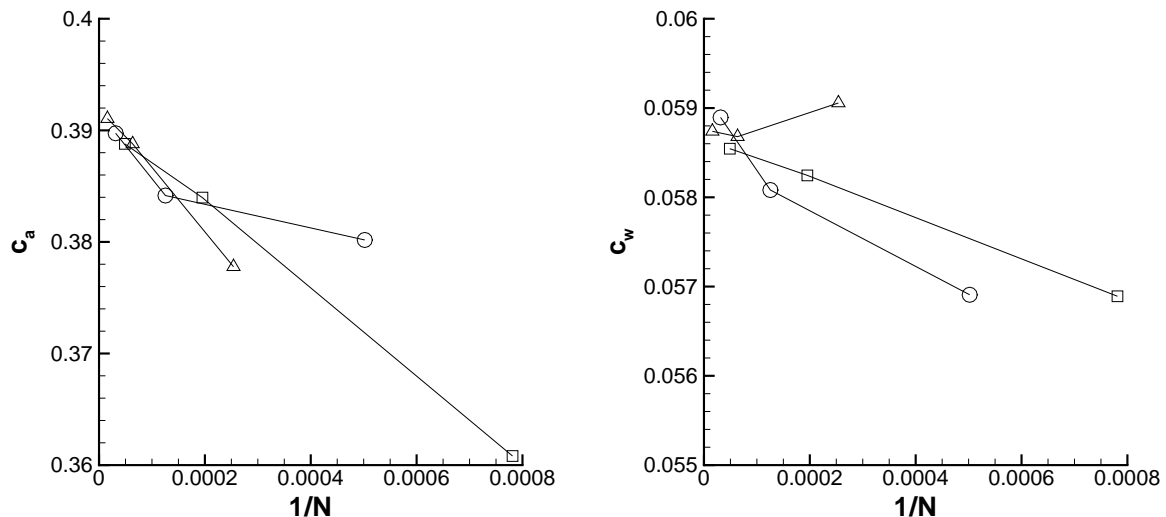


Bild 5.5: Konvergenz der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für reibungslose Umströmung des NACA0012-Profiles, wobei die Verdichtungsstöße die Interpolationsränder schneiden,  $\alpha = 1^\circ$ ,  $M_\infty = 0,85$ ,  $\square$ : konventionelles Gitter,  $\triangle$ : Chimären-Gitter,  $\circ$ : Chimären-Gitter mit hängenden Netzknoten

Die mit den Chimären-Gittern mit stoßangepassten Komponentengittern bestimmten Beiwerte liegen dagegen bei einer Auftragung über dem reziproken Wert der Gesamtzellenzahl näherungsweise auf einer Geraden, siehe Bild 5.6. Das Lösungsverfahren hat daher eine Genauigkeit von zweiter Ordnung. Die Übereinstimmung der auf den feinen Gittern berechneten Beiwerte ist deutlich besser, als die der auf den feinen, nicht stoßangepassten Gittern ermittelten Daten. Die Richardson-Extrapolation mit Gl. (5.4) ergibt im Mittel einen Auftriebsbeiwert von  $c_a \approx 0,39058$  und einen Widerstandsbeiwert von  $c_w \approx 0,05870$ .

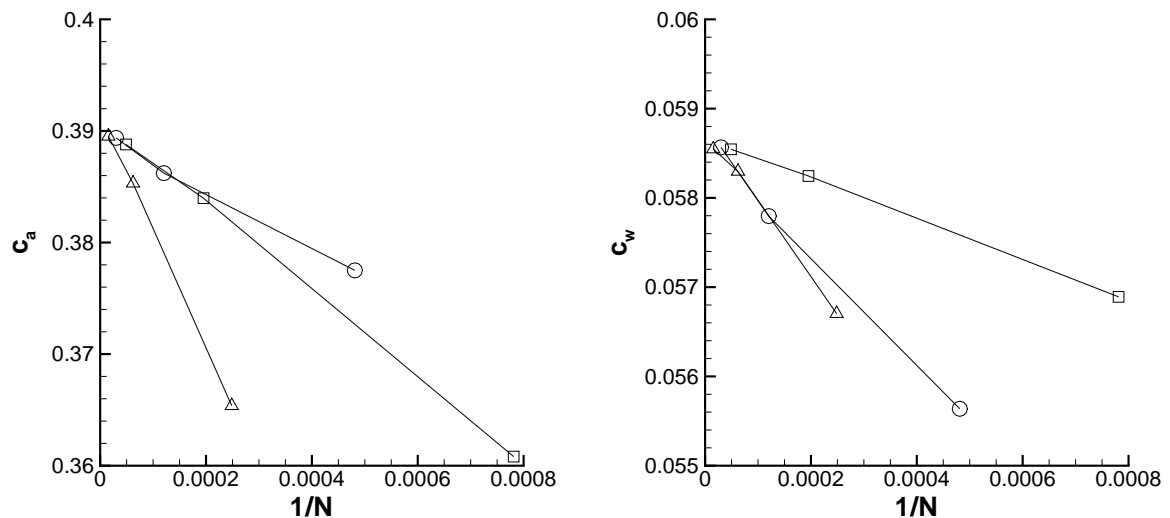


Bild 5.6: Konvergenz der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für reibungslose Umströmung des NACA0012-Profiles, wobei die Komponentengitter die Verdichtungsstöße einschließen,  $\alpha = 1^\circ$ ,  $M_\infty = 0,85$ ,  $\square$ : konventionelles Gitter,  $\triangle$ : Chimären-Gitter,  $\circ$ : Chimären-Gitter mit hängenden Netzknoten

### 5.3 L1T2-Dreielement-Hochauftriebsprofil

Die vorhergehende Untersuchung hat gezeigt, dass bei einfachen, reibungslosen Profilmumströmungen die Nutzung der Chimären-Technik zu genauen Ergebnissen führt. Dieser Nachweis soll auch für die komplexe, reibungsbehaftete Umströmung eines Dreielement-Hochauftriebsprofils erbracht werden. Die Berechnung einer solchen Strömung stellt wegen der großen Geschwindigkeitsunterschiede im Strömungsfeld, den Ablösegebieten in den Aussparungen von Vor- und Hauptflügel und den konfluenten Grenzschichten über dem Profil hohe Anforderungen an das Lösungsverfahren, siehe z. B. Rumsey und Ying [92]. Als Testfall dient das L1T2-Dreielementprofil, welches im Rahmen des britisch nationalen Hochauftriebsprogramms NHLP experimentell vermessen wurde. Die Ergebnisse sind von Moir [69] dokumentiert. Die Geometrie wird aus einem superkritischen BAC 3-11/RES/30/21-Profil gebildet, von dem ein Vorflügel mit 12,5% Profiltiefe und eine Fowler-Klappe mit 33% Profiltiefe abgespalten wurden. Der Vorflügel ist um  $25^\circ$  gegenüber dem Hauptprofil ausgeschlagen und die Klappe um  $20^\circ$ . Neben den experimentellen Daten sind auch mehrere Veröffentlichungen mit numerischen Nachrechnungen bekannt, z. B. Fejtek [36], Hellsten [41], Rudnik [90] und Wild [116]. Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse werden daher auch im Vergleich zu anderen Rechnungen diskutiert.

#### 5.3.1 Rechengitter

Zur Bewertung der Lösungsalgorithmen werden zwei verschiedene Rechengitter genutzt: Ein bereits von Rudnik [90] verwendetes konventionelles Mehrblockgitter mit acht Netzblöcken und insgesamt 176960 Zellen dient zur Ermittlung von Referenzlösungen, siehe Bild 5.7, oben. Für die Chimären-Rechnungen wurde im Rahmen

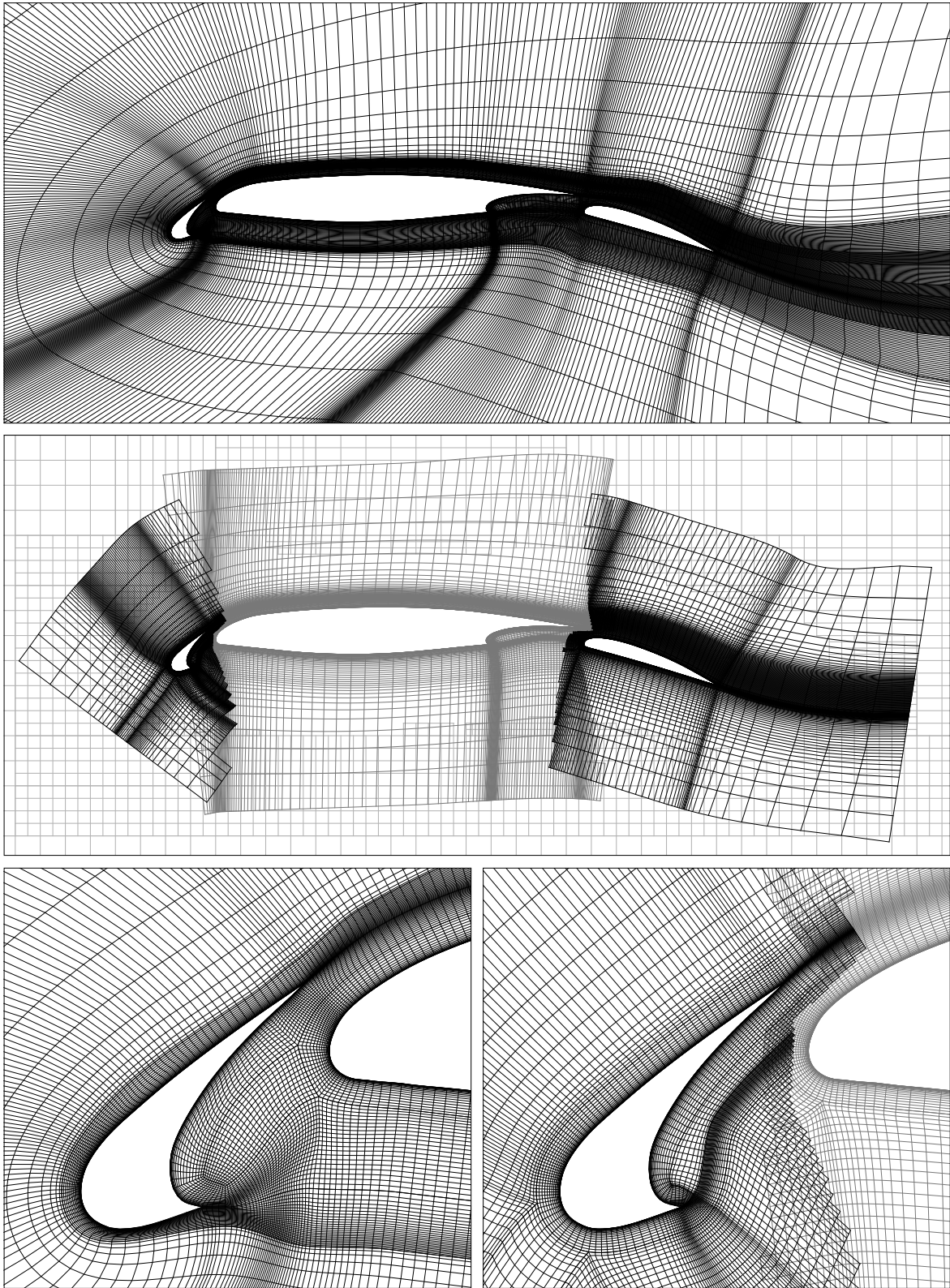


Bild 5.7: Einfach vergrößerte Gitter für L1T2-Dreielementprofil, oben: konventionelles Netz, Mitte: Chimären-Netz, unten: Detailansichten

der Arbeit ein neues Gittersystem erstellt. Es besteht aus je einem Komponentengitter für Vorflügel, Hauptflügel und Fowler-Klappe, die in ein kartesisches Hintergrundgitter mit anisotropen Zellen eingebettet sind, siehe Bild 5.7, Mitte. Das kartesische Hintergrundgitter wurde mit dem in Kapitel 4.1 beschriebenen Verfahren erzeugt. Um die Vergleichbarkeit der berechneten Strömungen zu gewährleisten, wurde bei der Netzgenerierung besonderer Wert auf eine zum konventionellen Gitter ähnliche Netzlinienverteilung in den Grenzschichten und in den Profilmachläufen gelegt. Eine Zusammenstellung der Block- und Zellenzahl der verwendeten Gitter ist in Tabelle 5.3 gegeben.

| Gittertyp                          | Netz        | Blockanzahl | Zellenzahl |
|------------------------------------|-------------|-------------|------------|
| konventionell                      | gesamt      | 8           | 176960     |
| Chimären-Netz mit hängenden Knoten | Vorflügel   | 6           | 42336      |
|                                    | Hauptflügel | 6           | 73440      |
|                                    | Klappe      | 4           | 43904      |
|                                    | Hintergrund | 58          | 31296      |
|                                    | gesamt      | 74          | 190976     |

Tabelle 5.3: Netzpunktzahl der Gitter für L1T2-Profil

Bei der Erstellung der Komponentengitter mit dem Netzgenerierer MegaCads [18] erwies sich die Nutzung überlappender Gitter in mehrerer Hinsicht als vorteilhaft im Vergleich zu Netzen mit konventionellen Blockübergängen: Dank des parametrischen Ansatzes von MegaCads zum Erzeugen der Netze war es möglich, die zur Vernetzung des Hauptflügels erstellte Steuerungsdatei durch Änderung weniger Parameter auch zur Generierung des Gitters für den Vorflügel zu nutzen. Zusätzlich konnte die Steuerungsdatei nach dem Entfernen der Schritte, die zur Vernetzung der Aussparungen von Vor- und Hauptflügel erforderlich sind, auch für die Erstellung des Gitters um die Klappe verwendet werden. Die unabhängige Vernetzung der Komponenten führte neben der vereinfachten Netzgenerierung auch zu einer Reduzierung der Zahl der Netzlinien unterhalb des Profils, da die zur Auflösung der Grenzschichten benötigten Netzlinien nicht durch das gesamte Rechengebiet geführt werden mussten, siehe Bild 5.7, unten.

### 5.3.2 Netzkonvergenzuntersuchung

Die Verifikation der Chimären-Technik und der Blockübergänge mit hängenden Netzknoten für komplexe, reibungsbehaftete Strömungen erfolgt mit einer Netzkonvergenzstudie für das L1T2-Dreielementprofil bei einem Anstellwinkel von  $\alpha = 20,18^\circ$ , einer Anströmmachzahl von  $M_\infty = 0,197$  und einer Reynolds-Zahl von  $Re = 3,52 \cdot 10^6$ . Die Positionen der laminar-turbulenten Transition sind in Tabelle 5.4 angegeben. Die mit Hilfe einer  $e^n$ -Methode ermittelten Werte wurden Wild [116] entnommen. Für die hier vorgestellten Rechnungen musste die Transitionslage auf der Oberseite des Vorflügels etwas nach vorn verschoben werden, um das mit einem Strömungsabriss verbundene Aufplatzen einer im Transitionsbereich vorliegenden laminaren Ablöseblase zu verhindern.

| Element     | Unterseite ( $x/l$ ) | Oberseite ( $x/l$ )        |
|-------------|----------------------|----------------------------|
| Vorflügel   | -0,05381             | -0,1015<br>(Wild: -0,1002) |
| Hauptprofil | 0,6398               | 0,0485                     |
| Klappe      | 1,17675              | 0,9287                     |

Tabelle 5.4: Transitionslagen in Koordinaten des Hauptprofils für die L1T2-Konfiguration nach Wild [116] für  $\alpha = 20,18^\circ$ ,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$

Für die Netzkonvergenzstudie wurde ausgehend von dem feinen konventionellen Gitter und dem feinen Chimären-Gitter jeweils ein mittelfeines und daraus ein grobes Netz durch entfernen jeder zweiten Netzlinie erzeugt. Auf jedem der Netze wurde eine Strömungssimulation unter Verwendung des  $k\omega$ -Turbulenzmodells durchgeführt. Dabei wurden zur Gewährleistung der Vergleichbarkeit der Ergebnisse für alle Rechnungen dieselben numerischen Parameter verwendet. Als Ausnahme war für die Chimären-Rechnungen eine Anpassung der Lochdefinitionsgritter erforderlich, damit auf den groben Gittern eine ausreichende Netzüberlappung vorhanden ist.

Als Ergebnisse der Netzkonvergenzstudie sind in Tabelle 5.5 die berechneten Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte  $c_a$  und  $c_w$  eingetragen. Zusätzlich sind die mit

| Gittertyp                          |         | Zellenzahl | $c_a$  | $c_w$   |
|------------------------------------|---------|------------|--------|---------|
| konventionell                      | grob    | 11060      | 3,5220 | 0,15841 |
|                                    | mittel  | 44240      | 3,8856 | 0,07181 |
|                                    | fein    | 176960     | 4,0370 | 0,05456 |
|                                    | extrap. | $\infty$   | 4,0872 | 0,04881 |
| Chimären-Netz mit hängenden Knoten | grob    | 11936      | 3,8451 | 0,14293 |
|                                    | mittel  | 47744      | 3,9438 | 0,08053 |
|                                    | fein    | 190976     | 4,0463 | 0,05708 |
|                                    | extrap. | $\infty$   | 4,0805 | 0,04927 |

Tabelle 5.5: Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für Netzkonvergenzstudie L1T2-Dreielementprofil,  $\alpha = 20,18^\circ$ ,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$

Gl. (5.4) für ein unendlich feines Gitter extrapolierten Werte angegeben. Die in Bild 5.8, links dargestellte Auftragung der  $c_a$ -Werte über der reziproken Gesamtzellenzahl der Rechengitter zeigt, dass für beide Gittertypen die Auftriebsbeiwerte bei einer Verfeinerung der Netze gegen denselben Wert streben. Dabei sind die mit Hilfe des Chimären-Gitters ermittelten Ergebnisse jeweils dichter beim angestrebten Auftriebsbeiwert als die für das konventionelle Gitter gleicher Netzfeinheit bestimmten Werte. Nach Gl. (5.3) sollten die  $c_a$ -Werte bei der in Bild 5.8 gewählten Darstellung auf einer Geraden liegen. Dies ist insbesondere für die Chimären-Rechnung nicht der Fall. Vermutlich liegt dieses Verhalten an einer unzureichenden Auflösung der relevanten Strömungsphänomene auf dem größten Gitter, aber nicht an einer veränderten Genauigkeitsordnung des Lösungsverfahrens. Unter der Annahme eines Verfahrens mit einem Fehler von zweiter Ordnung ergibt die Extrapolation der Auftriebsbeiwerte mit Gl. (5.4) für unendlich feine Gitter im Mittel einen Wert von  $c_a = 4,084$ .

Wie Bild 5.8, rechts entnommen werden kann, sind die auf den verschiedenen Gittertypen berechneten Widerstandsbeiwerte  $c_w$  für ähnlich feine Netze vergleichbar.

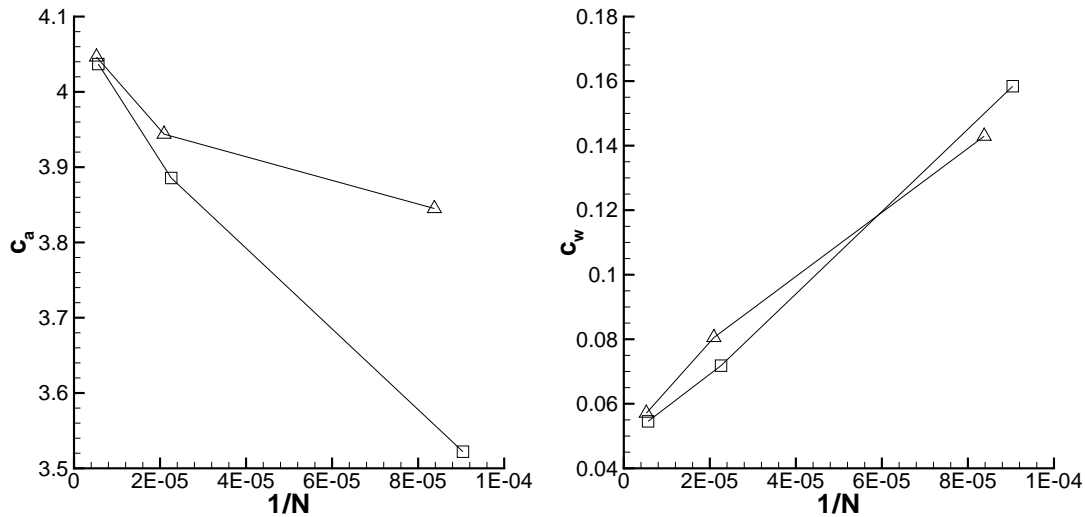


Bild 5.8: Konvergenz der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für L1T2-Testfall,  $\alpha = 20,18^\circ$ ,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$ ,  $\square$  : konventionelles Gitter,  $\triangle$  : Chimären-Gitter

Die für einen Gittertyp ermittelten Werte liegen annähernd auf einer Geraden, so dass nach Gl. (5.3) von einem Verfahrensfehler von zweiter Ordnung auszugehen ist. Die Richardson-Extrapolation liefert für ein unendlich feines Gitter den Wert  $c_w \approx 0,0490 \pm 0,0003$ .

Als weiteres Ergebnis zeigt die Netzkonvergenzstudie auch, dass reibungsbehaftete Profilmströmungen mit einem konventionellen Gitter und einem Chimären-Gitter vergleichbarer Zellenzahl ähnlich genau berechnet werden können. Dieses Erkenntnis steht im Gegensatz zu der in Kapitel 5.2 getroffenen Aussage, dass bei Chimären-Gittern wegen der ausgeblendeten Zellen innerhalb eines Körpers und der doppelt vorhandenen Zellen in den Überlappungsgebieten eine höhere Netzzellenanzahl erforderlich ist. Im vorliegenden Fall wird dieser Nachteil jedoch durch den Vorteil ausgeglichen, dass die vielen zur Auflösung der Grenzschichten erforderlichen Netzlinien nicht durch das gesamte Rechengebiet geführt werden müssen.

### 5.3.3 Vergleich mit experimentellen Daten

Nach der erfolgreichen Verifikation der in dieser Arbeit eingeführten Algorithmen schließt sich der Validierungsprozess an. Dazu werden als erster Schritt die bei der Netzkonvergenzstudie für die L1T2-Konfiguration auf den feinen Gittern erzielten Ergebnisse mit den vorliegenden experimentellen Ergebnissen von Moir [69] verglichen. Die Druckverteilungen auf dem Vorflügel, dem Hauptprofil und der Fowler-Klappe sind in Bild 5.9 aufgetragen, wobei der dimensionslose Druckbeiwert  $c_p$  durch

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad (5.7)$$

gegeben ist. Es zeigt sich ein nahezu identischer Verlauf der auf dem konventionellen Gitter und dem Chimären-Gitter berechneten Lösungen. Auch die Übereinstimmung

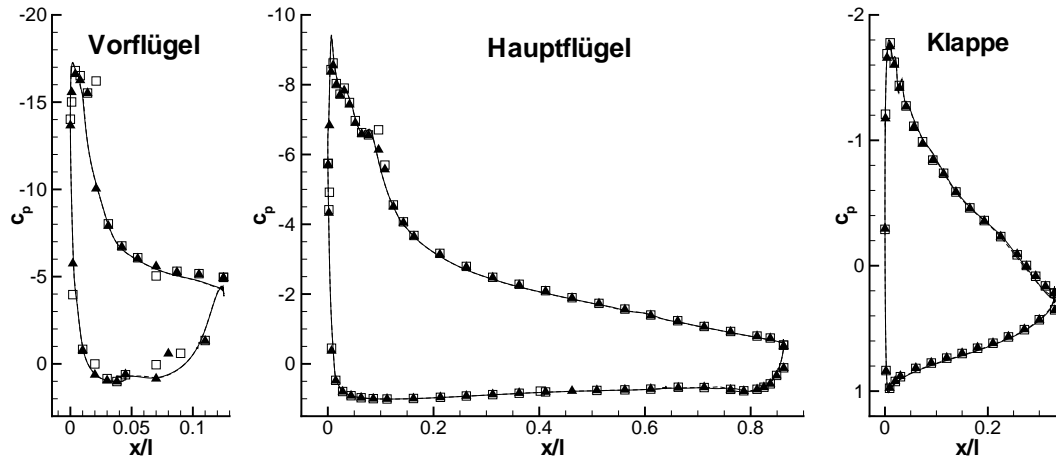


Bild 5.9: Rechnerisch für L1T2-Konfiguration ermittelte Druckverteilungen im Vergleich zum Experiment,  $\alpha = 20,18^\circ$ ,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$ , - - - : konventionelles Gitter, — : Chimären-Gitter,  $\square$  : Messung 1,  $\blacktriangle$  : Messung 2

mit dem Experiment ist sehr gut. Geringe Abweichungen sind nur am Vorflügel hinter der Saugspitze im Bereich der laminaren Ablöseblase und an der Hinterkante des Vorflügels festzustellen.

Für die Vorhersage von Hochauftriebsströmungen ist die genaue Wiedergabe der Grenzschichten und deren Wechselwirkungen untereinander wichtig. Eine zur Darstellung von Grenzschichtprofilen und Nachläufen gleichermaßen geeignete Größe ist der Gesamtdruckbeiwert  $c_{p0}$

$$c_{p0} = \frac{p_0 - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}, \quad (5.8)$$

mit

$$p_0 = p \cdot \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (5.9)$$

wobei  $M$  die lokale Machzahl bezeichnet. In Bild 5.10 sind die berechneten und gemessenen Verläufe des Gesamtdruckbeiwerts für vier Stationen dargestellt. Die erste Station befindet sich bei 35% der Profiltiefe des Hauptflügels, Station zwei ist auf der Fowler-Klappe direkt hinter der Hinterkante des Hauptprofils lokalisiert, die dritte Station liegt bei 50% der Klappentiefe und Station 4 ist an der Klappenhinterkante. Die mit Hilfe des konventionellen Gitters und mit dem Chimären-Gitter berechneten Gesamtdruckverteilungen zeigen an allen vier Stationen eine sehr gute Übereinstimmung. Damit ist für das Chimären-Netz der Nachweis erbracht, dass beim Übergang der Strömung von einem Komponentengitter in das nächste die Genauigkeit der Nachläufe nicht negativ beeinflusst wird. Die im Vergleich zum Experiment festzustellenden Unterschiede sind vermutlich auf eine nicht ausreichende Netzfeinheit an den Grenzschichträndern, sowie in geringem Maße auch auf das verwendete  $k\omega$ -Turbulenzmodell zurückzuführen. Dies wird durch einen Vergleich der hier erzielten Ergebnisse mit denen von Hellsten [41] deutlich. Weiterhin können auch die Messergebnisse selbst mit Ungenauigkeiten behaftet sein. Diesen Schluss lassen die im Folgenden angegebenen Ergebnisse zweier Messungen zu, bei denen für gleiche Anströmbedingungen deutlich unterschiedliche Kraftbeiwerte ermittelt wurden.



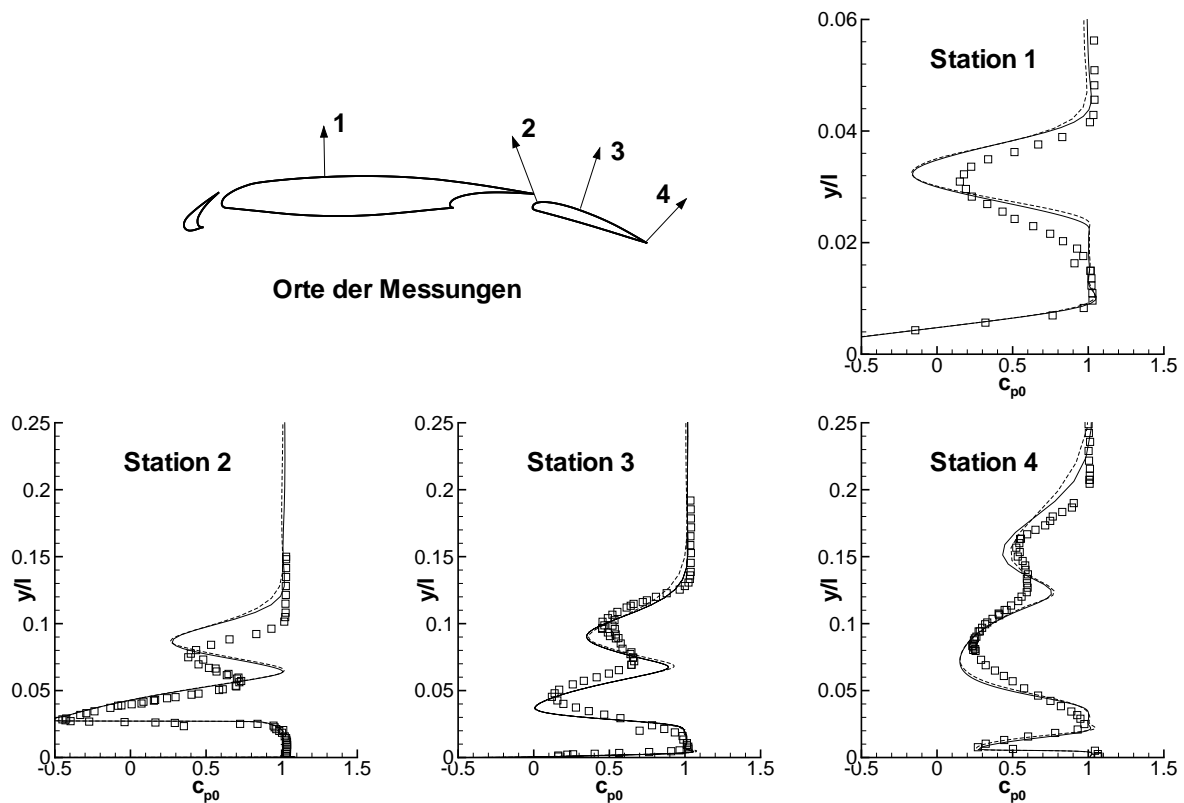


Bild 5.10: Gesamtdruckverteilungen auf Oberseite des L1T2-Dreielementprofils im Vergleich zur Messung,  $\alpha = 20,18^\circ$ ,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$ , --- : konventionelles Gitter, — : Chimären-Gitter,  $\square$  : Messung

Eine Gegenüberstellung der berechneten Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte mit den experimentell bestimmten Werten ist in Tabelle 5.6 angegeben. Wie bereits in Kapi-

|                 | $c_a$ | $c_w$  | Netzzellen | Anmerkung                      |
|-----------------|-------|--------|------------|--------------------------------|
| Experiment 1    | 4,110 | 0,0677 |            |                                |
| Experiment 2    | 4,075 | 0,0734 |            |                                |
| konventionell   | 4,037 | 0,0546 | 176960     | $k\omega$                      |
|                 | 4,087 | 0,0488 | $\infty$   | $k\omega$ , extrapoliert       |
| Chimären-Gitter | 4,046 | 0,0571 | 190976     | $k\omega$                      |
|                 | 4,081 | 0,0493 | $\infty$   | $k\omega$ , extrapoliert       |
| Rudnik [90]     | 4,014 | 0,0706 | 176960     | $k\omega$                      |
| Hellsten [41]   | 4,09  | 0,055  | 364608     | $k\omega$ -SST                 |
|                 | 4,06  | 0,057  | 364608     | $k\omega$ -EARSM               |
|                 | 4,07  | 0,056  | $\infty$   | $k\omega$ -EARSM, extrapoliert |

Tabelle 5.6: Vergleich der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte für das L1T2-Dreielementprofil,  $\alpha = 20,18^\circ$ ,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$

tel 5.3.2 diskutiert, liegen die auf dem konventionellen Gitter und dem Chimären-Gitter berechneten Beiwerte dicht beieinander. Der Vergleich mit den in zwei Messungen experimentell bestimmten Auftriebsbeiwerten zeigt, dass der numerisch ermittelte Auftrieb jeweils zu niedrig vorhergesagt wurde. Dieses würde sich bei einer Verfeine-

rung der Gitter ändern, da der für ein unendlich feines Gitter extrapolierte Wert im Bereich der Messungen liegt. Die berechneten Widerstandsbeiwerte sind im Vergleich zur Messung zu niedrig. Der für ein unendlich feines Gitter extrapolierte Wert verdeutlicht, dass bei einer weiteren Verfeinerung der Gitter die Diskrepanz größer würde. Gründe für die Abweichungen könnten falsche Transitionslagen oder Windkanalinterferenzen sein.

Die weitere Bewertung der Beiwerte kann anhand einiger in der Literatur veröffentlichter Ergebnisse erfolgen, die ebenfalls in Tabelle 5.6 angegeben sind. Für alle Rechnungen wurden fast identische Transitionslagen verwendet, so dass Unterschiede in den Beiwerten auf die verwendeten Lösungsalgorithmen zurückzuführen sind. Die Untersuchungen von Rudnik [90] basieren auf dem auch in dieser Arbeit verwendeten konventionellen Rechengitter. Der von ihm ermittelte Auftriebsbeiwert ist deutlich kleiner als der hier bzw. experimentell ermittelte Wert. Dagegen liegt der von Rudnik bestimmte Widerstandsbeiwert im Bereich der Messungen. Die Ursache für die Unterschiede liegt in den verschiedenen Lösungsverfahren begründet. Hellsten [41] simulierte die Strömung auf einem Netz mit der doppelten Zellenanzahl wie die hier verwendeten Netze. Er verwendete dazu ein  $k\omega$ -SST-Turbulenzmodell nach Menter [68] bzw. eine Eigenentwicklung eines  $k\omega$ -EARSM-Modells. Beide Turbulenzmodelle sind dem hier verwendeten  $k\omega$ -Turbulenzmodell als überlegen anzusehen. Die von Hellsten ermittelten Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte sind bei Berücksichtigung der unterschiedlich feinen Netze mit den Werten dieser Arbeit vergleichbar. Dies bestärkt die Annahme der Richtigkeit der hier erzielten Lösungen.

### 5.3.4 Auftriebskennlinie und Polare

Zur weiteren Validierung der numerischen Verfahren werden für die L1T2-Konfiguration die Auftriebskennlinie in Abhängigkeit des Anstellwinkels und die Polare bestimmt. Da die Transitionslagen nicht für alle Anstellwinkel bekannt sind, werden anders als in den vorhergehenden Untersuchungen sämtliche Rechnungen vollturbulent, das heißt ohne die Vorgabe laminarer Bereiche, durchgeführt. Zur Abschätzung des Einflusses der Transition auf den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert sind in Tabelle 5.7 die entsprechenden Werte einer Rechnung mit bzw. ohne Transition für einen Anstellwinkel von  $20,18^\circ$  den experimentellen Werten gegenübergestellt. Es zeigt sich,

| Gittertyp       | Transition     | $c_a$ | $c_w$  |
|-----------------|----------------|-------|--------|
| konventionell   | mit Transition | 4,037 | 0,0546 |
|                 | vollturbulent  | 3,842 | 0,0746 |
| Chimären-Gitter | mit Transition | 4,046 | 0,0571 |
|                 | vollturbulent  | 3,898 | 0,0845 |
| Experiment 1    |                | 4,110 | 0,0677 |
| Experiment 2    |                | 4,075 | 0,0734 |

Tabelle 5.7: Einfluss der Transition auf den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert des L1T2-Dreielementprofils bei  $\alpha = 20,18^\circ$ ,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$

dass bei den vollturbulenten Rechnungen, bedingt durch das Aufdicken der Grenzschichten, der Auftriebsbeiwert abnimmt und deutlich unterhalb der Messergebnisse

liegt. Der Widerstandsbeiwert vergrößert sich dagegen um ca. ein Drittel, so dass er nun größer ist als experimentell bestimmt.

Die Darstellung der numerisch und experimentell bestimmten Kennlinien für den Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit vom Anstellwinkel in Bild 5.11, links zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Kennlinien für den Bereich kleiner Anstellwinkel bis zum Erreichen des Maximalauftriebs. Bei sehr großen Anstellwinkeln nach

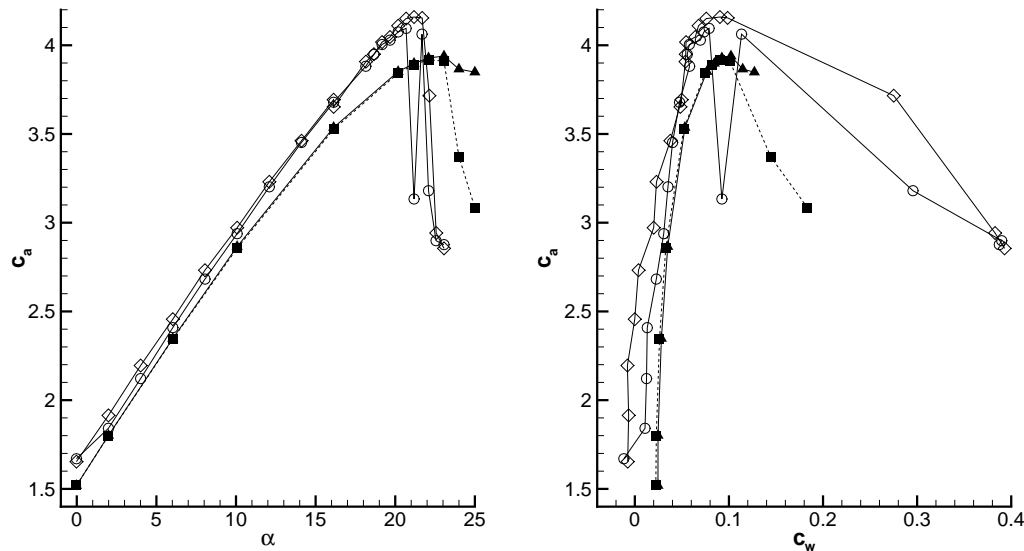


Bild 5.11: Berechnete Auftriebskennlinien und Polaren für L1T2-Dreielementprofil im Vergleich zum Experiment, vollturbulente Rechnungen,  $M_\infty = 0,197$ ,  $Re = 3,52 \cdot 10^6$ , ■ : konventionelles Gitter, ▲ : Chimären-Gitter, ◇ : Messung 1, ○ : Messung 2

dem Erreichen des Maximalauftriebs fällt der mit dem konventionellen Gitter berechnete Auftrieb jedoch deutlich stärker ab als mit dem Chimären-Gitter vorhergesagt. Die Ursache ist eine verschieden starke Ablösung der Strömung an der Hinterkante des Hauptprofils, vermutlich infolge der unterschiedlichen Netzfeinheit oberhalb der Fowler-Klappe. Der Anstellwinkel beim Auftreten des Maximalauftriebs ist in beiden Rechnungen ähnlich, wobei sich für das konventionelle Gitter ein Winkel von  $22^\circ$  und für das Chimären-Gitter ein Winkel von  $23^\circ$  ergibt. Im Vergleich zur Messung fällt zunächst der bei allen Anstellwinkeln zu niedrige Auftrieb als Folge der vollturbulenten Rechnung auf. Der experimentell bestimmte Anstellwinkel beim Erreichen des Maximalauftriebs ist mit  $21^\circ$  kleiner als numerisch vorhergesagt. Dies ist vermutlich auf ein nicht richtig simuliertes Abreißverhalten zurückzuführen. In den vollturbulenten Rechnungen löst die Strömung an der Hinterkante des Hauptprofils ab. Die unter Berücksichtigung der Transition in Kapitel 5.3.2 durchgeführten Strömungssimulationen legen dagegen einen Strömungsabriss am Vorflügel als tatsächlichen Mechanismus nahe.

Auch die in Bild 5.11, rechts eingezeichneten Polaren zeigen eine gute Übereinstimmung der numerisch ermittelten Kennlinien, wobei der auf dem konventionellen Gitter ermittelte Widerstand bis zum Erreichen des Maximalauftriebs jeweils etwas niedriger ist als der auf dem Chimären-Gitter bestimmte Wert. Bedingt durch die vollturbulente Rechnung liegen die Widerstandsbeiwerte jeweils höher als die experimentell gemessenen.

## 5.4 Hubschrauberrumpf mit Bauchstiel

Die erste Validierung der Chimären-Technik für dreidimensionale Strömungen wird am Beispiel eines Hubschrauberrumpfs durchgeführt. Das in Bild 5.12, links gezeigte Modell stellt die stark vereinfachte Geometrie eines Eurocopter DGV 200 Hubschraubers dar. Die aerodynamischen Eigenschaften des mit „C1“ bezeichneten

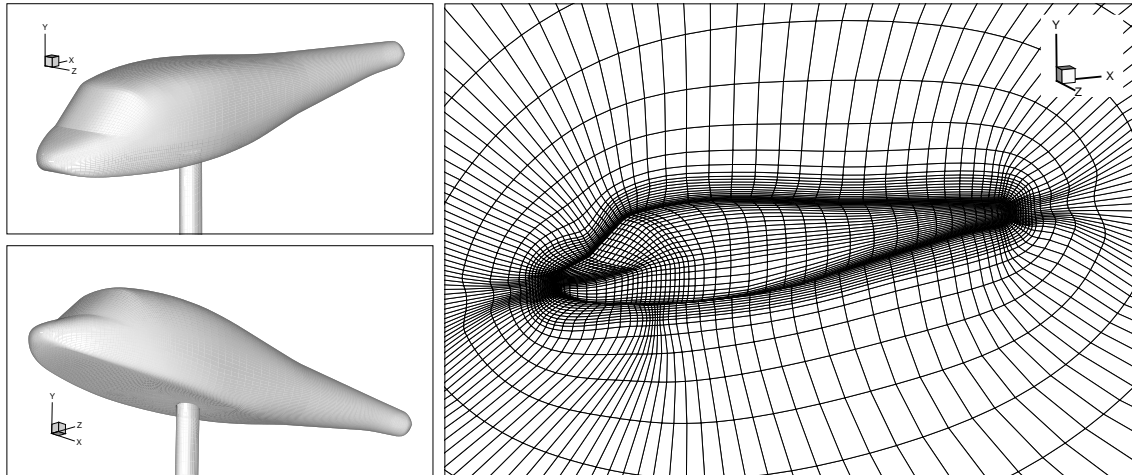


Bild 5.12: C1 Konfiguration, links: Geometrie mit Windkanalhalterung, rechts: einfach vergrößertes Rechengitter für Konfiguration ohne Bauchstiel

Windkanalmodells wurden in zwei Messkampagnen „Helifuse“ und „Helico98“ im ONERA F1 Windkanal ermittelt, siehe Brezillon [16].

Im Rahmen des Helifuse-Projekts wurden neben den Windkanalmessungen auch Berechnungen der Rumpfumströmung mit verschiedenen Strömungslösern durchgeführt, siehe Gleize et al. [38]. Dabei zeigte sich, dass der zur Halterung des Windkanalmodells verwendete Bauchstiel einen starken Einfluss auf die Strömung hat. Das in Bild 5.12, rechts dargestellte Rechengitter für das Halbmodell ohne Bauchstiel musste daher um die Halterung ergänzt werden, vgl. Geyr [37]. Um das Ausgangsnetz möglichst wenig zu verändern, wurde dazu ein Teil des Netzes auf der Unterseite der Konfiguration entfernt und ein Gitter für den Bauchstiel eingefügt, siehe Bild 5.13, links. Der Zwang zu fortlaufenden Netzlinien an Blockübergängen schränkte dabei die

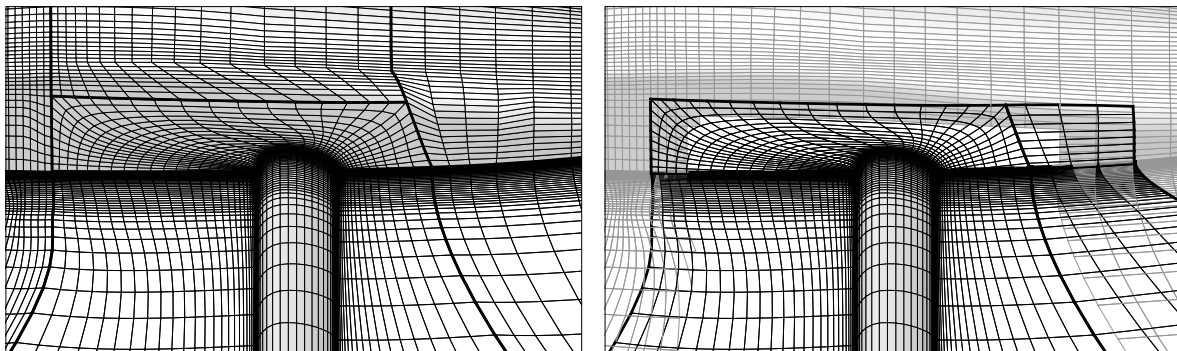


Bild 5.13: Netz für C1-Konfiguration mit Bauchstiel, links: konventionelles Gitter, rechts: Chimären-Gitter

Wahl möglicher Netzlinienverläufe in dem Gitter für den Bauchstiel stark ein.

Besser geeignet für das Hinzufügen von Gitterkomponenten in ein bestehendes Gitter ist die in dieser Arbeit entwickelte Chimären-Technik. Sie erfordert keine Veränderung des Ausgangsgitters und erlaubt eine freie Wahl der Netzlinienverläufe in dem neuen Komponentengitter. Das in dieser Arbeit erstellte Chimären-Gitter für die C1-Konfiguration basiert dementsprechend auf dem Ausgangsnetz für den Rumpf. Anstatt jedoch ein neues Netz für den Bauchstiel zu erstellen, wurde der entsprechende Netzblock aus dem konventionellen Mehrblockgitter extrahiert und zur Gewährleistung einer ausreichenden Netzüberlappung mit dem Rumpfgitter um einen zusätzlichen Netzblock ergänzt, siehe Bild 5.13, rechts. Dieses Vorgehen ermöglicht im Folgenden einen einfacheren Vergleich der auf dem konventionellen Gitter und dem Chimären-Gitter erzielten Strömungslösungen, da Unterschiede ausschließlich durch die Verwendung der Chimären-Technik verursacht werden, aber nicht durch unterschiedlich feine Netze.

Für die C1-Konfiguration stehen somit drei Gitter zur Verfügung: das aus drei Blöcken mit insgesamt 819200 Zellen bestehende Ausgangsgitter für den Rumpf ohne Bauchstiel, das konventionelle Gitter für den Rumpf mit Bauchstiel aus sechs Blöcken mit 960000 Zellen sowie das aus fünf Netzblöcken mit 976000 Zellen zusammengesetzte Chimären-Gitter. Mit jedem Gitter werden nun drei Strömungssimulationen durchgeführt. Als Anströmbedingungen dienen dabei die in Tabelle 5.8 angegebenen Werte, wobei der Anstellwinkel in allen Fällen  $0^\circ$  beträgt. Für die Rechnungen wird wegen der

| Machzahl | Reynoldszahl       |
|----------|--------------------|
| 0,2292   | $15,26 \cdot 10^6$ |
| 0,2357   | $30,15 \cdot 10^6$ |
| 0,2317   | $56,84 \cdot 10^6$ |

Tabelle 5.8: Anströmbedingungen für Hubschrauberrumpf

kleinen Anströmgeschwindigkeiten die Vorkonditionierungstechnik verwendet. Turbulenz wird mit Hilfe des  $k\omega$ -Turbulenzmodells simuliert. Bei dem Chimären-Gitter muss außerdem wegen der Netzüberlappung auf der Körperoberfläche die in Kapitel 3.2.3 beschriebene Interpolationsmethode angewendet werden.

In Bild 5.14 sind exemplarisch die für die niedrigste und die höchste Reynoldszahl berechneten Druckverteilungen in der Symmetrieebene der Rumpfs dargestellt. Die auf der linken Seite aufgetragenen Druckverteilungen auf der Rumpfoberseite zeigen einen identischen Verlauf für alle Rechnungen und stimmen sehr gut mit dem Experiment überein. Ein Einfluss des Bauchstiels kann nicht festgestellt werden. Dagegen zeigen die Druckverteilungen für die Rumpfunterseite in Bild 5.14, rechts einen Aufstau der Strömung vor dem Bauchstiel, wobei eine sehr gute Übereinstimmung der experimentellen und numerischen Ergebnisse vorliegt. Auch hinter der Modellaufhängung ist die Störung der Strömung deutlich zu erkennen. Die auf dem konventionellen Gitter und dem Chimären-Gitter berechneten Strömungslösungen stimmen sehr gut überein. Im Vergleich zum Experiment geben die Druckverteilungen direkt hinter dem Bauchstiel für  $Re = 15 \cdot 10^6$  den tendenziellen Verlauf richtig wieder, der Druck ist aber niedriger als im Experiment bestimmt. Bei der Reynoldszahl  $Re = 57 \cdot 10^6$  stimmen Rechnung und Experiment dagegen gut überein. Die nicht gezeigten Druckverteilungen

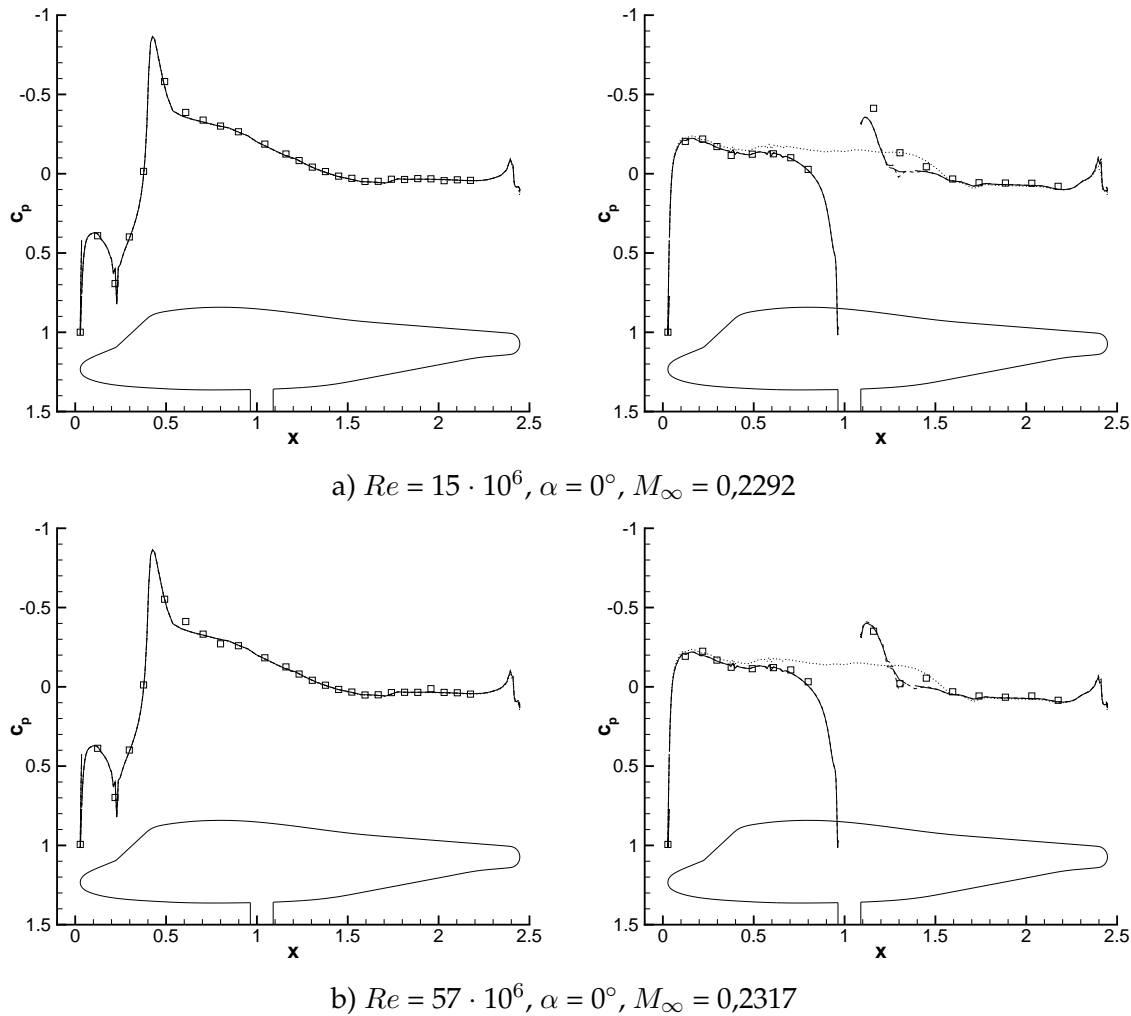


Bild 5.14: Berechnete Druckverteilungen in der Symmetrieebene der C1-Konfiguration im Vergleich zum Experiment, links: Oberseite, rechts Unterseite,  $\cdots$ : Ausgangsnetz ohne Bauchstiel,  $---$ : konventionelles Gitter,  $—$ : Chimären-Gitter,  $\square$ : Messung

gen für  $Re = 30 \cdot 10^6$  gleichen den für  $Re = 57 \cdot 10^6$  ermittelten.

Die in Bild 5.15 abgebildeten Stromlinienverläufe im Übergangsbereich von Rumpf und Bauchstiel für  $Re = 57 \cdot 10^6$  zeigen die gleichen Wirbelstrukturen für das konventionelle Netz und das Chimären-Netz. Ein sehr ähnliches Strömungsbild ergibt sich auch für die anderen Reynoldszahlen. Diese Ergebnisse zeigen, dass Netzüberlappungen auf Körperoberflächen die Lösungsgenauigkeit nicht beeinträchtigen.

Bei einem Vergleich mit den von Geyr [37] und Gleize [38] veröffentlichten Ergebnissen zeigt sich ein starker Einfluss des verwendeten Turbulenzmodells auf die Wirbeltopologie. Je nach Modell ist der Drehsinn des Wirbels in der Symmetrieebene unterschiedlich, oder es entsteht gar kein Wirbel. Die im Experiment gewonnenen Ölanstrichbilder lassen diesbezüglich keine Aussagen zu. Dieser Aspekt wird im Folgenden nicht weiter untersucht, da der für diese Arbeit wichtige Nachweis der Gleichheit der Lösungen auf dem konventionellen Gitter und dem Chimären-Gitter bereits erbracht wurde.

Die gemessenen und berechneten Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte der Konfiguration sind nicht öffentlich zugänglich. Daher sind die im Folgenden vorgestellten Daten

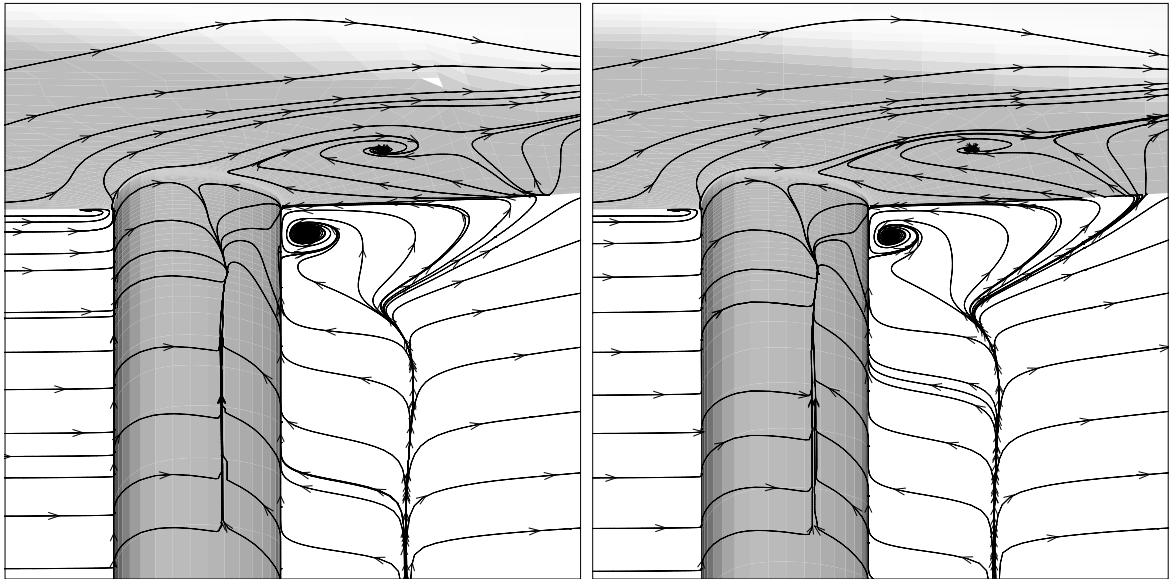


Bild 5.15: Stromlinienverlauf am Rumpf-Bauchstiel-Übergang der C1-Konfiguration bei  $Re = 57 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $M_\infty = 0,2317$ , links: konventionelles Netz, rechts: Chimären-Gitter

mit einem konstanten Faktor skaliert, der auch in den Veröffentlichungen anderer Autoren genutzt wird. Die Ermittlung der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte muss bei dem Chimären-Gitter aufgrund der Netzüberlappung auf der Körperoberfläche mit dem in Kapitel 3.3 beschriebenen Verfahren zur Vermeidung einer doppelten Kraftintegration erfolgen. Die numerischen Strömungssimulationen ergeben für die Konfiguration ohne Bauchstiel einen schwachen Abtrieb, während bei Berücksichtigung des Bauchstiels ein geringer Auftrieb vorhergesagt wird, siehe Bild 5.16, links. Die mit Hil-

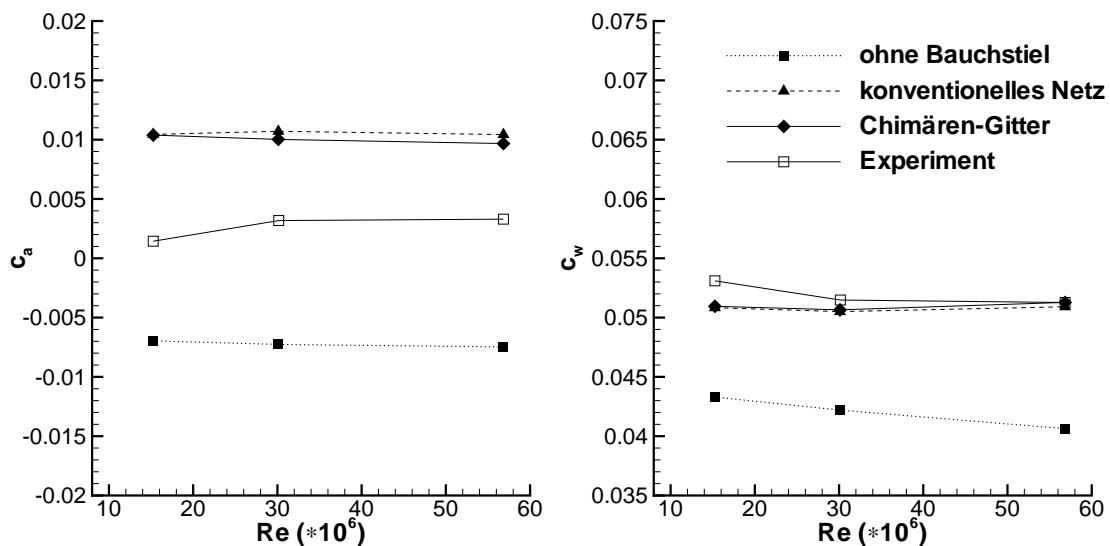


Bild 5.16: Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte der C1-Konfiguration in Abhängigkeit von der Reynoldszahl

fe des konventionellen Gitters und des Chimären-Gitters erzielten Ergebnisse stimmen gut überein. Die experimentell bestimmten Auftriebsbeiwerte liegen zwischen den mit

und ohne Bauchstiel berechneten Werten, so dass die Berücksichtigung des Bauchstiels die Übereinstimmung mit dem Experiment nicht verbessert.

Die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwerts von der Reynoldszahl ist in Bild 5.16, rechts dargestellt. Deutlich zeigt sich der Einfluss des Bauchstiels, dessen Vernachlässigung eine Verringerung des Widerstands um 20% bewirkt. Die Ergebnisse der Rechnungen auf dem konventionellen Gitter und dem Chimären-Gitter stimmen sehr gut überein. Die Übereinstimmung der berechneten Widerstandsbeiwerte mit den gemessenen ist ebenfalls gut.

## 5.5 Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration

Aufbauend auf den erfolgreichen Strömungssimulationen für ein zweidimensionales Hochauftriebsprofil und einen dreidimensionalen Hubschrauberrumpf wird die Validierung des Chimären-Verfahrens für dreidimensionale Flugzeug-Hochauftriebskonfigurationen durchgeführt. Als Testfall dient dazu die DLR-F11 Konfiguration. Das auch mit KH3Y bezeichnete Modell eines airbusähnlichen Flugzeugs in Startkonfiguration wurde im Rahmen des „Eurolift“-Projekts experimentell und numerisch untersucht, siehe Rudnik [91]. Das Modell besteht aus Rumpf, Flügel, Vorflügel und Fowler-Klappe sowie den Klappenspindelverkleidungen zur Befestigung des Vorflügels und der Fowler-Klappe am Flügel. Bei dem hier betrachteten, als TC211 bezeichneten Testfall sind der Vorflügel und die Klappe einteilig und gehen vom Rumpf bis zur Flügelspitze. Dabei ist der Vorflügel um  $20^\circ$  ausgeschlagen und die Klappe um  $22^\circ$ . Die experimentellen Messungen für ein Halbmodell wurden im Niedergeschwindigkeitswindkanal LSWT bei EADS-Airbus in Bremen durchgeführt.

### 5.5.1 Netzgenerierung

Im Rahmen des Eurolift-Projekts wurde für die F11-Konfiguration mit durchgehender Hinterkantenklappe entsprechend des TC211 Testfalls ein konventionelles Mehrblockgitter mit 46 Blöcken und 2,8 Millionen Zellen erstellt. In dem Gitter wurden zur weiteren Vereinfachung die Klappenspindelverkleidungen nicht berücksichtigt. Das Netz wird für die folgenden Untersuchungen als Referenzgitter genutzt.

Bei dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Chimären-Gitter für die F11-Konfiguration sind Rumpf, Vorflügel, Hauptflügel und Fowler-Klappe jeweils einzeln vernetzt, siehe Bild 5.17. Basierend auf den Komponentengittern wurde ein kartesisches Hintergrundgitter mit dem, in Kapitel 4.1 beschriebenen, automatischen Netzgenerierer erzeugt. Zwei Netzebenen des kartesischen Gitters sind in Bild 5.18 dargestellt.

Die wesentliche Schwierigkeit bei der Generierung eines konventionellen Mehrblockgitters für eine Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration ist das Finden einer geeigneten Netztopologie. Diese muss bei einer in Spannweitenrichtung veränderlichen Profilgeometrie für alle Profilschnitte eine gleichmäßig gute Netzqualität gewährleisten und einen Anschluss des Flügelnetzes an das Rumpfgitter ermöglichen. Diese Problematik stellte sich bei der Generierung des Chimären-Gitters nicht dar. Wegen der unabhängigen Vernetzung der einzelnen Flugzeugkomponenten konnten jeweils Gitter



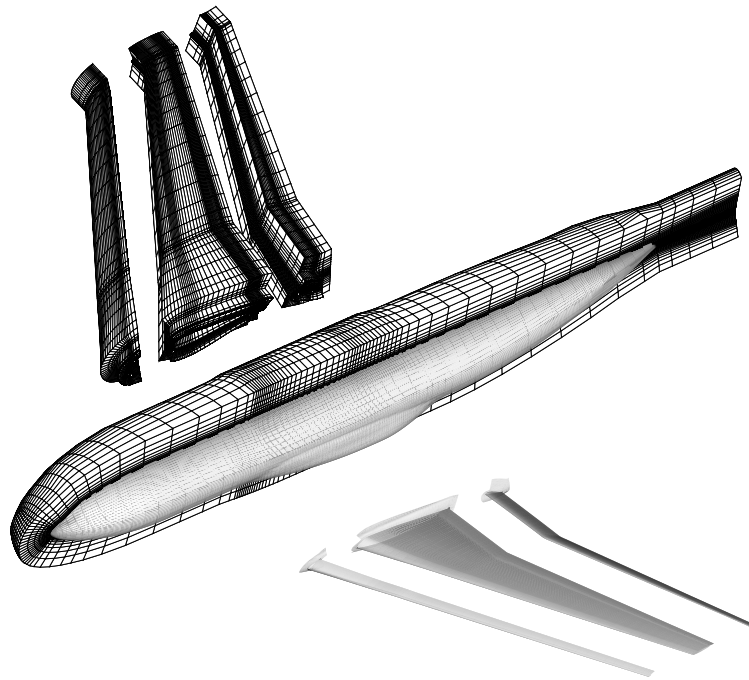


Bild 5.17: Komponentengitter des Chimären-Netzes für F11-Testfall, einfach vergrößert

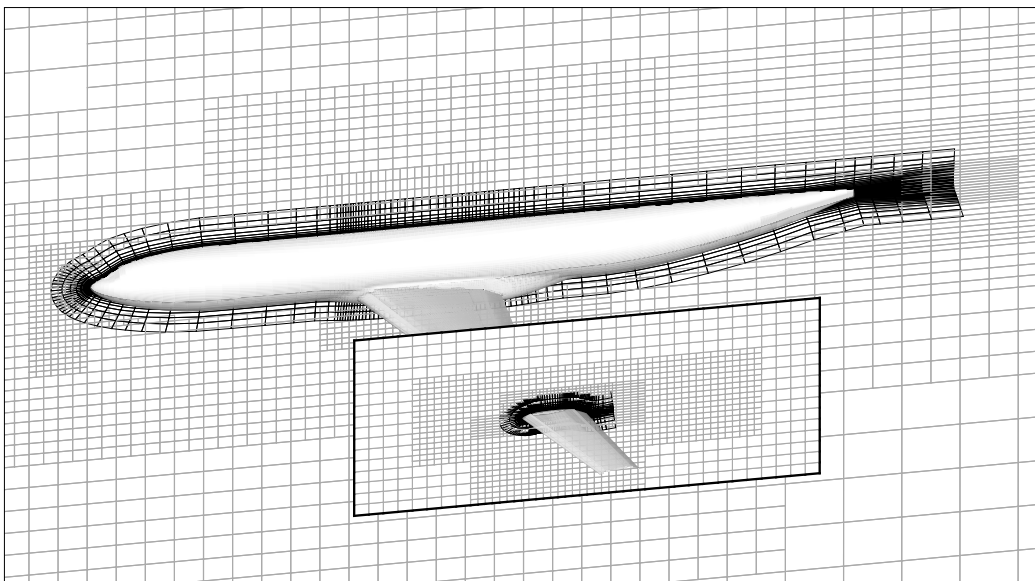


Bild 5.18: Netzebenen des einfach vergrößerten kartesischen Hintergrundgitters mit überlagerten Schnitten durch die Komponentengitter der F11-Konfiguration

mit sehr einfachen Topologien erstellt werden. Als Beispiel sind in Bild 5.19, oben Netz-schnitte durch den Flügel bei 70% der Halbspannweite dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Gitter der einzelnen Flügelkomponenten jeweils eine leicht zu generierende CH-Topologie aufweisen. Die zum Vergleich in Bild 5.19, unten dargestellten Schnitte durch das konventionelle Rechengitter zeigen dagegen eine deutlich kompliziertere Topologie, die nur mit erhöhtem Aufwand erstellt werden kann. Weiterhin sind die Netze im Bereich der Aussparungen von Vor- und Hauptflügel stark verzerrt.

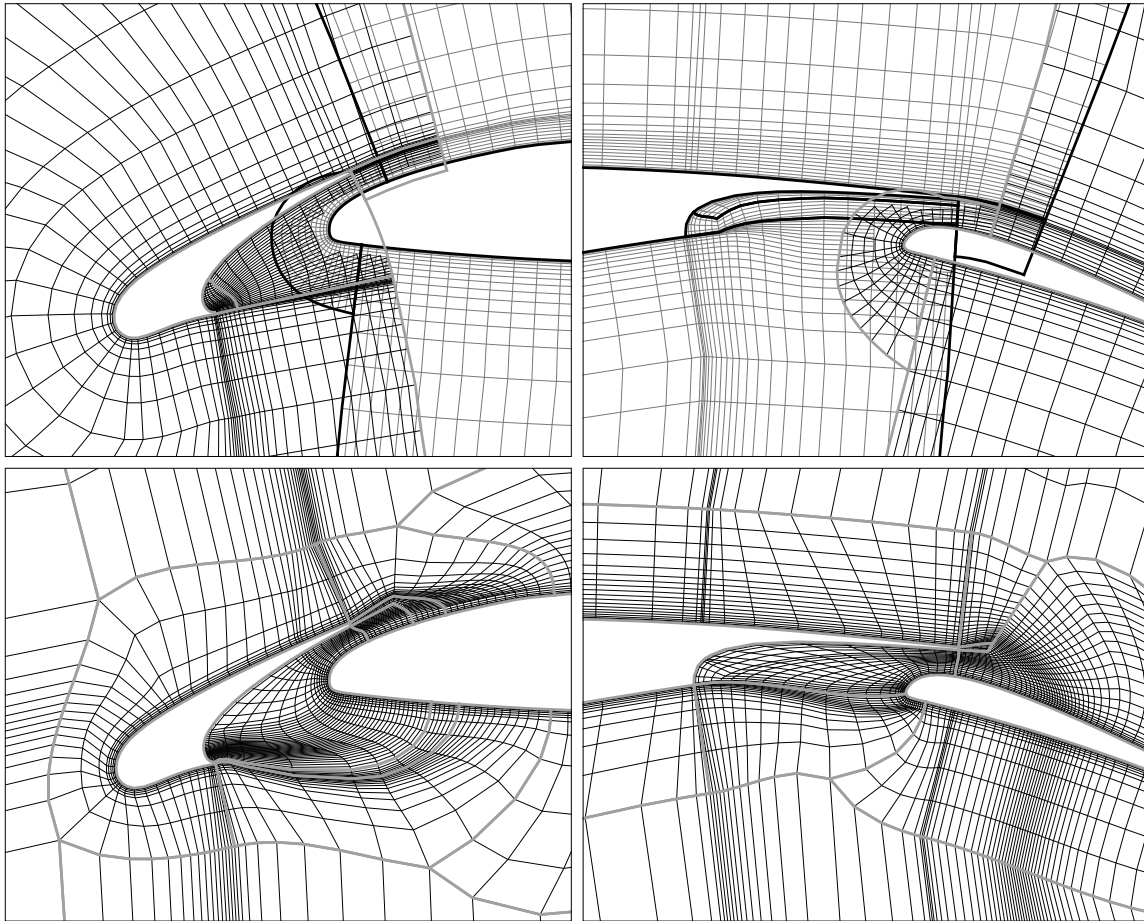


Bild 5.19: Flügelschnitt bei 70% der Halbspannweite der F11-Konfiguration, Netze einfach vergrößert, oben: Chimären-Netz, unten: konventionelles Gitter

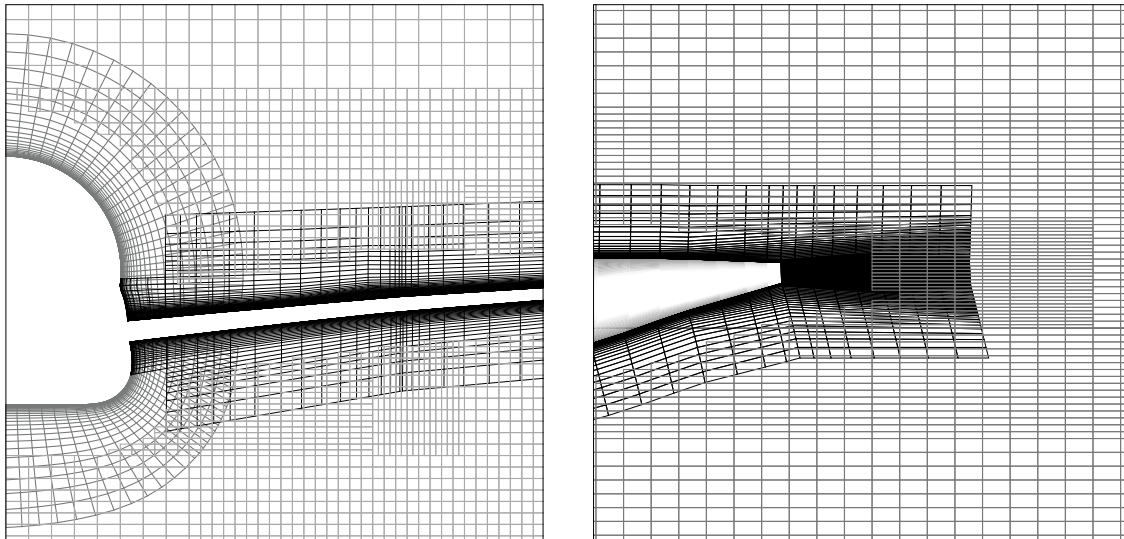


Bild 5.20: Schnitte durch Chimären-Gitter für F11-Konfiguration, links: Flügel-Rumpfübergang, rechts: Rumpfheck

Wie der in Bild 5.20, links dargestellte Schnitt durch das Rumpfgitter im Bereich des Flügel-Rumpfübergangs zeigt, wurde der Rumpf mit einem einfachen Gitter in OH-Topologie vernetzt. Zur Aufnahme des Flügelgitters wird in das Rumpfgitter ein Loch geschnitten, so dass bei der Netzgenerierung lediglich auf eine angepasste Netzfeinheit des Rumpfgitters geachtet werden musste. Der in Bild 5.20, rechts gezeigte Netzausschnitt im Bereich des Rumpfhecks verdeutlicht die Wichtigkeit anisotroper Zellen bei der Erstellung des Hintergrundgitters: Die verwendeten Zellen mit einem Seitenverhältnis von 1:8 entsprechen der Form der Zellen im Komponentengitter und ermöglichen somit eine genaue Interpolation der Strömungsgrößen. Als weiterer Vorteil ermöglichen sie eine ausreichende Überlappung mit dem Rumpfgitter, die bei würfelförmigen Zellen mit gleichem Volumen im Bereich ober- und unterhalb des Rumpfes nicht unbedingt gegeben wäre.

Primäres Ziel bei der Erzeugung des Chimären-Gitters war der Nachweis, dass eine dreidimensionale Hochauftriebskonfiguration mit Hilfe überlappender Netze effizient vernetzt werden kann. Daher wurden die Netze nicht bezüglich einer möglichst kleinen Netzpunktzahl optimiert. Das Chimären-Gitter enthält deshalb deutlich mehr Netzzellen, als das im Rahmen des Eurolift-Projekts für dieselbe Konfiguration erstellte konventionelle Mehrblockgitter, siehe Tabelle 5.9.

| Gittertyp                          | Netz        | Blockanzahl | Zellenzahl |
|------------------------------------|-------------|-------------|------------|
| konventionell                      | gesamt      | 46          | 2798592    |
| Chimären-Netz mit hängenden Knoten | Vorflügel   | 9           | 556416     |
|                                    | Hauptflügel | 13          | 1027712    |
|                                    | Klappe      | 9           | 438528     |
|                                    | Rumpf       | 2           | 350208     |
|                                    | Hintergrund | 264         | 1499648    |
|                                    | gesamt      | 297         | 3872512    |

Tabelle 5.9: Netzpunktzahl der Gitter für F11-Konfiguration

Die für die Chimären-Rechnungen benötigten Lochdefinitionsgitter können wegen der komplexen Form der Körper nicht durch manuelle Vorgabe der Gitterkoordinaten erzeugt werden. Stattdessen wurde für jede Komponente ein ihr Inneres ausfüllendes Netz erstellt. Die Netzknoten auf der äußeren Berandung des Gitters wurden anschließend in Richtung der Oberflächennormalenvektoren verschoben, bis das Lochdefinitionsgitter die jeweilige Komponente einschließlich der Grenzschichten einschloss. Das Erstellen der Lochdefinitionsgitter erforderte für die F11-Konfiguration ungefähr zwei Arbeitstage. Schwierigkeiten bereitete dabei die Gewährleistung einer ausreichenden Überlappung der Komponentengitter an Orten mit geringem Abstand zwischen den Körpern, zum Beispiel im Bereich der Hinterkante des Vorflügels und der Hauptflügeloberseite. Dort musste iterativ die Form der Lochdefinitionsgitter sowie die Netzlinienverteilung in den Komponentengittern entsprechend angepasst werden.

## 5.5.2 Druckverteilungen, Auftriebskennlinie und Polare

Zur Validierung des Chimären-Ansatzes für Flugzeug-Hochauftriebskonfigurationen wurden die im Windkanal für den Eurolift-Testfall TC211 gemessenen Auftriebskenn-

linie und Polare mit Hilfe des Chimären-Gitters und des konventionellen Mehrblocknetzes nachgerechnet. Wie im Experiment wurden dabei als Anströmbedingungen eine Machzahl von  $M_\infty = 0,174$  und eine Reynoldszahl von  $Re = 1,34 \cdot 10^6$  vorgegeben. Die Strömungssimulationen erfolgten unter Verwendung des  $k\omega$ -Turbulenzmodells und der Vorkonditionierungstechnik. Experimentell gewonnene Angaben über die Lage der laminar-turbulenten Transition sind nicht verfügbar, so dass die Rechnungen vollturbulent durchgeführt wurden.

Im Experiment wurden an den in Bild 5.21 angegebenen Flügelschnitten Druckverteilungen bestimmt. Dabei bezeichnet  $y/s$  die Schnittkoordinate in Bezug auf die Halb-

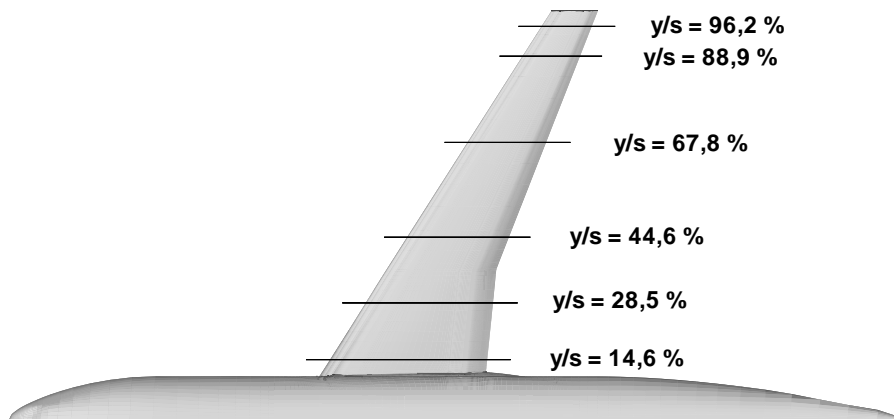


Bild 5.21: Positionen der Flügelschnitte für die Darstellung der Druckverteilungen bei der F11-Konfiguration

spannweite  $s$ . Die gemessenen und die berechneten Druckverteilungen für die Anstellwinkel  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 16^\circ$  und  $\alpha = 19^\circ$  sind in Bild 5.22 bis Bild 5.24 dargestellt. Wegen der nicht öffentlich zugänglichen Daten fehlen die Unterteilungen der Ordinatenachsen.

Die für einen Anstellwinkel von  $\alpha = 0^\circ$  berechneten Druckverteilungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Druckverläufen, siehe Bild 5.22. Geringe Abweichungen ergeben sich an den beiden Außenschnitten bei  $y/s = 88,9\%$  und  $y/s = 96,2\%$  auf der Unterseite des Flügels, vermutlich aufgrund einer unterschiedlichen Ausprägung der Flügelspitzenumströmung. Die in allen Schnitten festzustellenden geringen Unterschiede zwischen den numerisch ermittelten Druckbeiwerten sind auf die unterschiedlich feinen Rechengitter zurückzuführen, wobei erwartungsgemäß die auf dem feineren Chimären-Gitter erzielten Ergebnisse dichter bei den experimentellen Werten liegen.

Bei einem Anstellwinkel von  $\alpha = 16^\circ$  ist die Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Druckverteilungen sehr gut, siehe Bild 5.23.

Die in Bild 5.24 dargestellten Druckverteilungen für einen Anstellwinkel von  $\alpha = 19^\circ$  zeigen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung der numerisch erzielten Ergebnisse. Allerdings wird die im Experiment festgestellte Ablöseblase auf dem Vorflügel im inneren Flügelbereich nicht richtig vorhergesagt. Dies zeigt sich insbesondere beim Profilschnitt  $y/s = 28,5\%$ , bei dem die Verkleinerung der Saugspitze auf dem Vorflügel, die Erhöhung des Druckniveaus auf der Oberseite des Hauptflügels und der Druckverlauf auf der Oberseite der Klappe nicht richtig wiedergegeben werden. In den anderen Pro-

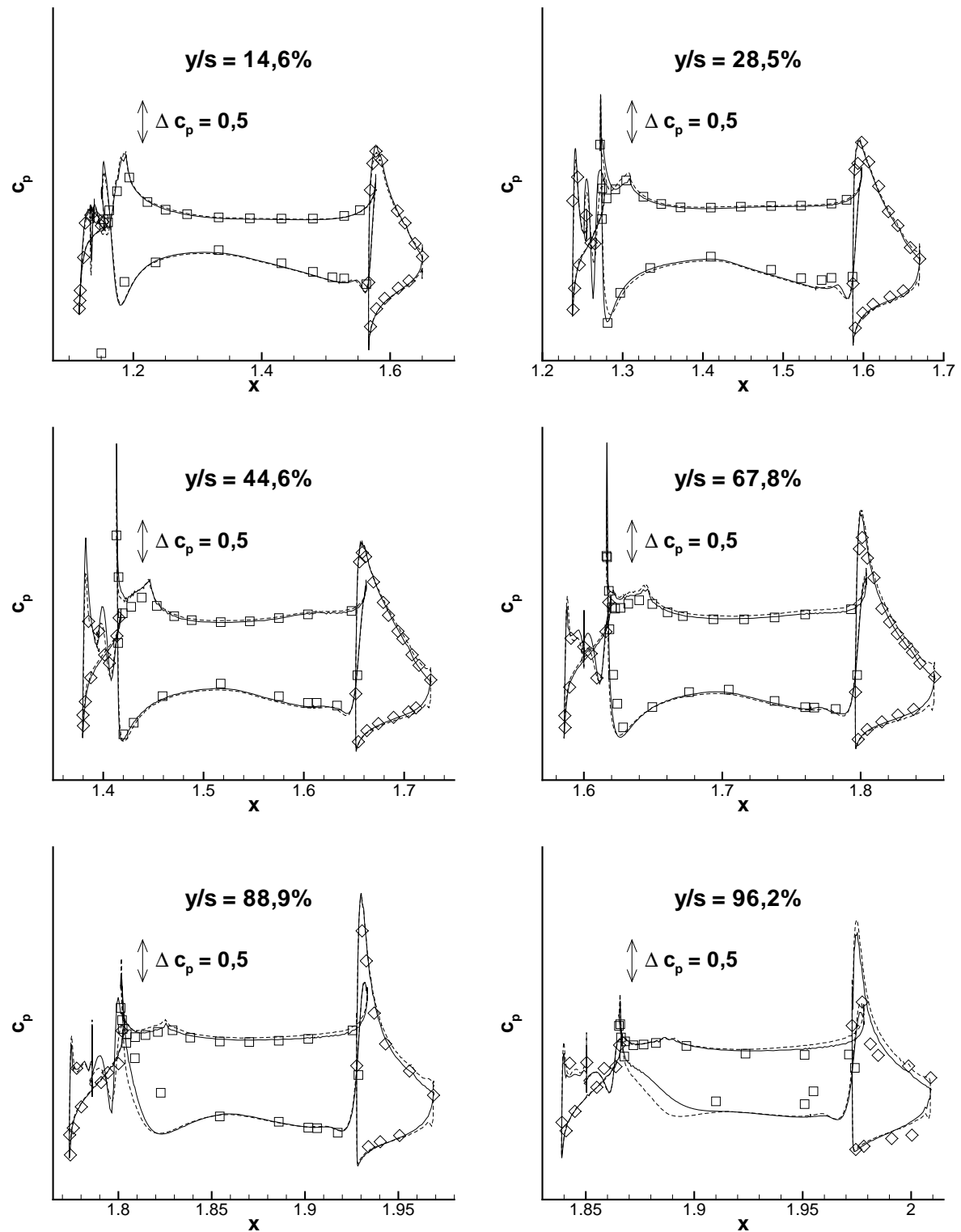


Bild 5.22: Druckverteilungen für F11-Konfiguration an verschiedenen Flügelschnitten bei  $\alpha = 0^\circ$ ,  $M_\infty = 0,174$ ,  $Re = 1,34 \cdot 10^6$ , — : Chimären-Gitter, - - - : konventionelles Gitter,  $\square$  : Experiment

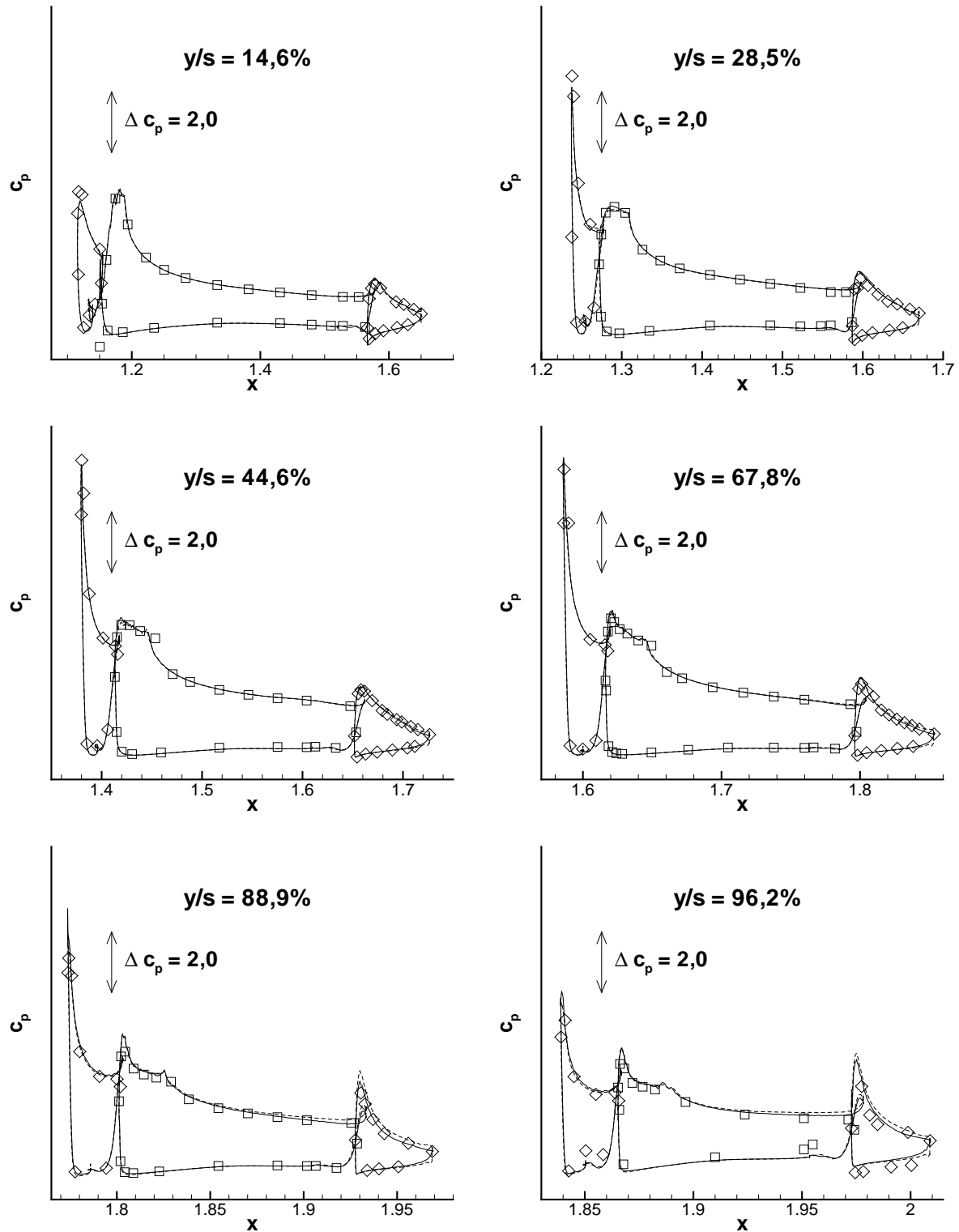


Bild 5.23: Druckverteilungen für F11-Konfiguration an verschiedenen Flügelschnitten bei  $\alpha = 16^\circ$ ,  $M_\infty = 0,174$ ,  $Re = 1,34 \cdot 10^6$ , — : Chimären-Gitter, - - - : konventionelles Gitter,  $\square$  : Experiment

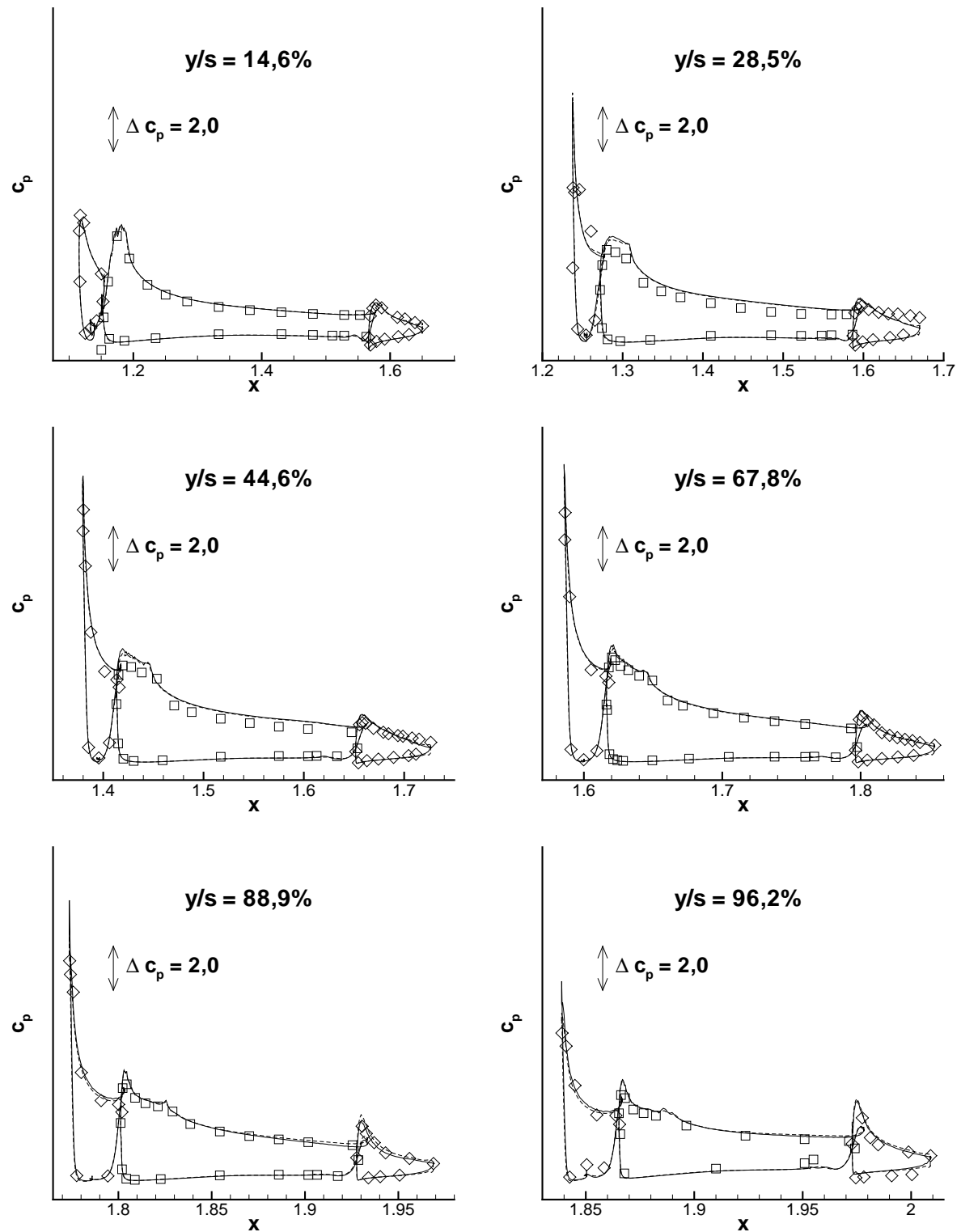


Bild 5.24: Druckverteilungen für F11-Konfiguration an verschiedenen Flügelschnitten bei  $\alpha = 19^\circ$ ,  $M_\infty = 0,174$ ,  $Re = 1,34 \cdot 10^6$ , — : Chimären-Gitter, - - - : konventionelles Gitter,  $\square$  : Experiment

filmschnitten ist die Übereinstimmung zwischen den experimentellen und berechneten Druckverteilungen gut.

Die Berechnung der globalen Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte muss wegen der sich mehrfach überlappenden Oberflächengitter im Bereich des Flügel-Rumpf-Übergangs mit der in Kapitel 3.3 beschriebenen Methode erfolgen. Ein Ausschnitt des erzeugten, überlappungsfreien Oberflächengitters zeigt Bild 5.25.

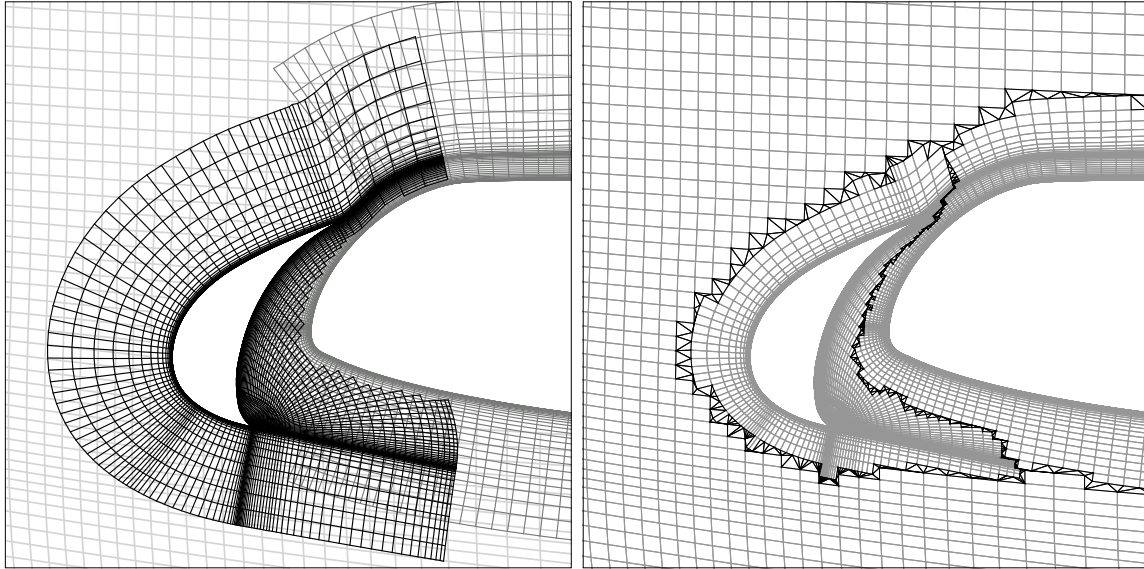


Bild 5.25: Eindeutige Oberflächendarstellung für Kraftberechnung im Bereich des Flügel-Rumpf-Übergangs der F11-Konfiguration

Die Abhängigkeit des Auftriebsbeiwerts vom Anstellwinkel ist in Bild 5.26, links aufgetragen. Die auf dem konventionellen Gitter und dem Chimären-Gitter erzielten Er-

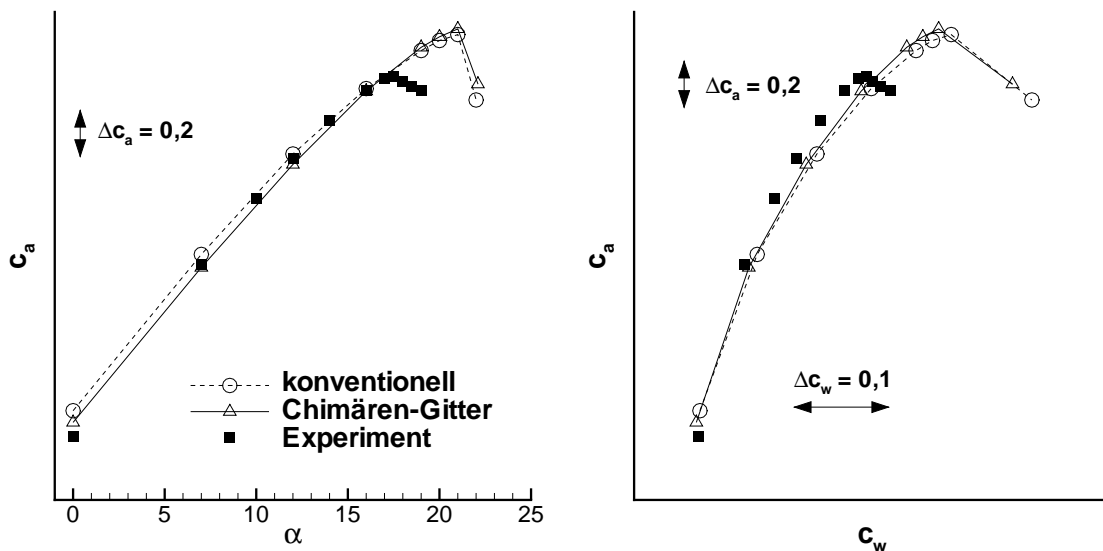


Bild 5.26: Kennlinien für F11-Konfiguration, Testfall TC211, links: Auftriebsbeiwerte, rechts: Polare,  $M_\infty = 0,174$ ,  $Re = 1,34 \cdot 10^6$



gebnisse stimmen gut überein. Abweichungen können auf die unterschiedliche Netzfeinheit zurückgeführt werden. Der Anstellwinkel beim Erreichen des Maximalauftriebs von  $\alpha = 21^\circ$  wird mit beiden Gittertypen gleich vorhergesagt. Im Vergleich zum Experiment stimmen die berechneten Auftriebsbeiwerte bei  $\alpha = 7^\circ$ ,  $12^\circ$  und  $16^\circ$  gut überein. Bei  $\alpha = 0^\circ$  liegen die berechneten Auftriebsbeiwerte etwas zu hoch. Der numerisch ermittelte Auftriebsanstieg bei zunehmendem Anstellwinkel ist etwas kleiner als der gemessene. Der experimentell bestimmte Anstellwinkel des Maximalauftriebs ist mit  $\alpha = 18,5^\circ$  um  $\Delta\alpha = 2,5^\circ$  niedriger als numerisch vorhergesagt. Dies liegt an der in den numerischen Simulationen verspätet auftretenden Strömungsablösung am Vorflügel. Weiterhin deutet der in den Rechnungen deutlich stärkere Auftriebsabfall nach dem Erreichen des Maximalauftriebs auf ein anderes Ablöseverhalten hin. Als Ursache können die fehlende Modellierung der Transition oder eine Beeinflussung der Strömung durch die in den numerischen Simulationen nicht berücksichtigten Klappenspindelverkleidungen angeführt werden. Möglich sind auch Windkanalinterferenzen oder Auswirkungen der im Experiment verwendeten Halbmodelltechnik.

Die in Bild 5.26, rechts dargestellten Polaren zeigen, dass bei Anstellwinkeln größer als  $\alpha = 0^\circ$  die auf dem konventionellem Gitter berechneten Widerstandsbeiwerte höher sind, als die für das Chimären-Gitter bestimmten Werte. Dies liegt in der unterschiedlichen Netzfeinheit begründet. Mit beiden numerischen Simulationen wird jedoch ein größerer Widerstand vorhergesagt, als bei gleichem Auftriebsbeiwert experimentell ermittelt wurde. Mögliche Gründe dafür wurden bereits bei der Diskussion der Auftriebskennlinie genannt.

## 5.6 Rechengeschwindigkeit

In den Verifikations- und Validierungsuntersuchungen wurden die in dieser Arbeit entwickelten Algorithmen hinsichtlich ihrer Ergebnisqualität beurteilt. Ein weiteres wichtiges Kriterium ist ihr Einfluss auf die Gesamtrechnzeit des Strömungslösers. Dazu wird die Zeit gemessen, die pro Zelle des Rechengitters für eine Iteration des Lösungsverfahrens benötigt wird. Durch Multiplikation der festgestellten Zeit mit der Gesamtzellenzahl und mit der Zahl der für die Lösung der Strömungsgleichungen erforderlichen Iterationen kann die Gesamtrechnzeit bestimmt werden. Bei einem Chimären-Verfahren erfolgt vor der eigentlichen Strömungsberechnung die Lochdefinition sowie die Suche nach Spenderzellen. Der Zeitbedarf der entsprechenden Algorithmen ist in der Rechenzeit pro Iteration nicht enthalten und muss daher gesondert ermittelt werden. Allerdings wird bei einer stationären Strömungssimulation die Lochdefinition und Suche nach Spenderzellen nur einmal durchgeführt, so dass, wie im Folgenden gezeigt wird, ihr Zeitanteil an der Gesamtrechnzeit vernachlässigt werden kann.

Zur Bestimmung der Rechengeschwindigkeit auf einer skalaren Rechnerarchitektur dient ein PC-Cluster mit Intel Xeon Prozessoren mit einer Taktfrequenz von 3,06 GHz. Mit diesem wurden als erster Testfall Strömungssimulationen für das in Kapitel 5.3 beschriebene L1T2-Dreielementprofil durchgeführt. Wie Bild 5.27, links entnommen werden kann, wird bei einer sequentiellen Rechnung auf dem Chimären-Gitter pro Zelle und Iteration des Lösungsverfahrens eine Zeit von  $34,0 \mu\text{s}$  benötigt. Bei einer paralle-

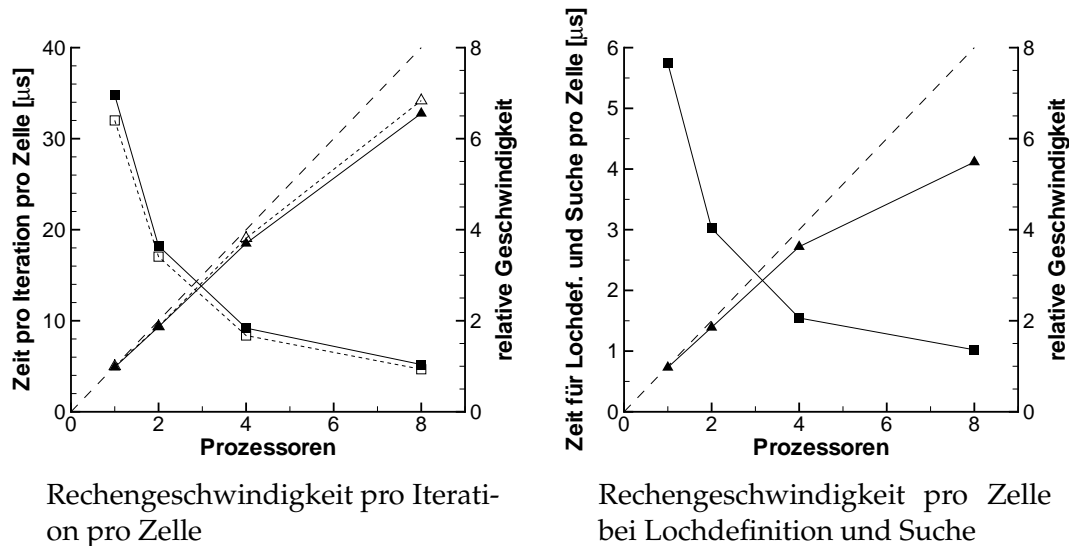


Bild 5.27: Rechengeschwindigkeit für L1T2-Testfall mit Chimären-Gitter und konventionellem Gitter auf PC-Cluster, ■, □ : Zeit, ▲, △ : relative Rechengeschwindigkeit, ausgefüllte Symbole gelten für das Chimären-Netz, --- : idealer Geschwindigkeitsanstieg

len Rechnung verringert sich mit zunehmender Prozessoranzahl die Rechenzeit. Die ebenfalls in Bild 5.27, links aufgetragene relative Rechengeschwindigkeit

$$\text{relative Geschwindigkeit} = \frac{\text{Zeitbedarf mit einem Prozessor}}{\text{Zeitbedarf mit } n \text{ Prozessoren}} \quad (5.10)$$

zeigt, dass bei Rechnungen mit acht Prozessoren ein Geschwindigkeitsgewinn um den Faktor 6,6 erreicht wird. Die Abweichung von dem theoretisch zu erwartenden Geschwindigkeitszuwachs um den Faktor 8,0 ist vor allem auf die zusätzlich benötigte Zeit für die Kommunikation zwischen den Prozessoren zurückzuführen.

Für den Vergleich der Rechengeschwindigkeit des Strömungslösers auf dem Chimären-Gitter und dem konventionellen Gitter wurde das ursprünglich aus acht Netzblöcken bestehende konventionelle Gitter für die L1T2-Konfiguration in elf Blöcke unterteilt, um bei parallelen Rechnungen eine gute Lastverteilung zu ermöglichen. Bild 5.27, links kann entnommen werden, dass die Rechengeschwindigkeit auf dem Chimären-Gitter um 10% niedriger ist als auf dem konventionellen Gitter. Dies ist auf den zusätzlichen Zeitbedarf für die Interpolation und Verschickung von Strömungsdaten für die Chimären-Empfängerzellen und den Kommunikationsaufwand zur Vorgabe von Flüssen an hängenden Netzknoten zurückzuführen. Weiterhin sind beim Chimären-Gitter aufgrund der hohen Zahl der Netzblöcke deutlich mehr Operationen zur Vorgabe der Randbedingungen erforderlich. Der relative Geschwindigkeitsgewinn bei parallelen Rechnungen ist für beide Gittertypen gleich.

Die für Rechnungen auf dem Chimären-Gitter benötigte Zeit für die Lochdefinition und den Suchvorgang dauert bei einer sequentiellen Rechnung bezogen auf eine Zelle des Rechengitters  $5,7 \mu s$ , siehe Bild 5.27, rechts. Dies entspricht ungefähr einem Sechstel der für eine Iteration des Lösungsverfahrens benötigten Zeit. Bei einer parallelen Rechnung zeigt sich nicht der theoretisch zu erwartende Geschwindigkeitsgewinn. Die Ausführungszeit bei acht Prozessoren reduziert sich beispielsweise nur um den Faktor 5,5. Der Rechenaufwand ist folglich nicht für alle beteiligten Prozessoren

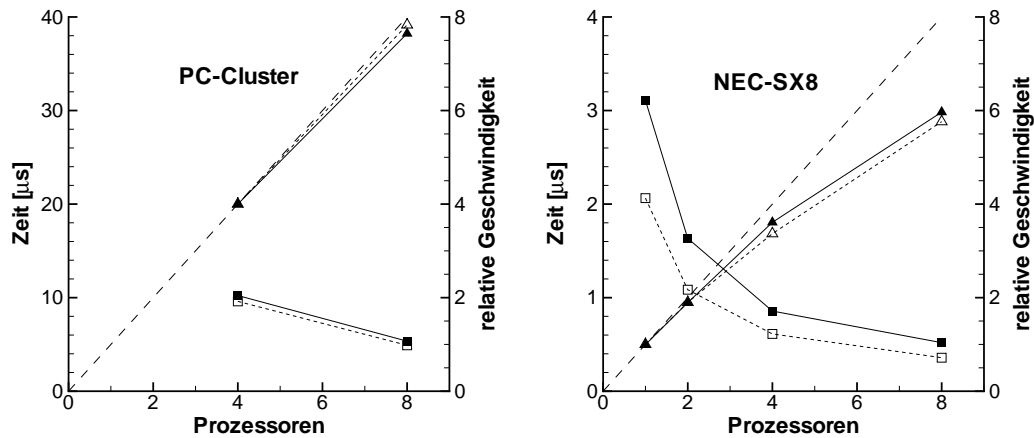
gleich. In FLOWer werden die Netzblöcke derart auf die Prozessoren verteilt, dass die Zahl der Netzzellen auf jedem Prozessor ähnlich ist. Dies führt während der iterativen Lösung der Strömungsgleichungen zu einer guten Lastbalancierung, da die Zahl der Rechenoperationen ungefähr proportional zu der Zahl der Netzzellen ist. Bei der Lochdefinition hängt die Zahl der Operationen dagegen von der Anzahl der Netzzellen ab, die sich innerhalb bzw. in unmittelbarer Nähe der Lochdefinitionsgeritter befinden. Für einen optimal balancierten Suchvorgang müsste wiederum die Zahl der Spenderzellen auf jedem Prozessor gleich sein. Zur Minimierung der Rechenzeit müsste demzufolge vor jedem Verfahrensschritt eine neue Lastverteilung vorgenommen werden. Die entsprechende Anpassung von FLOWer war im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht möglich, da die Lastverteilung von der CLIC-3D-Bibliothek vorgenommen wird. Arbeiten anderer Autoren zu diesem Thema wurden bereits in Kapitel 1.4.1 angegeben.

Die Beurteilung der Rechengeschwindigkeit für dreidimensionale Strömungen erfolgt am Beispiel der in Kapitel 5.5 beschriebenen F11-Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration. Für diese Anwendung ist allerdings der Speicherplatzbedarf so hoch, dass auf dem PC-Cluster lediglich Strömungssimulationen mit vier oder acht Prozessoren möglich sind. Bild 5.28a, links kann entnommen werden, dass bei Verwendung von vier Prozessoren des PC-Clusters eine Chimären-Rechnung um 9% langsamer ist, als eine Strömungsberechnung auf einem konventionellen Gitter. Wie bereits für das L1T2-Profil diskutiert, liegt dies an dem zusätzlichen Zeitbedarf für den Austausch von Chimären- und Flussdaten und dem erhöhten Aufwand bei der Vorgabe von Randbedingungen aufgrund der vielen kleinen Netzblöcke.

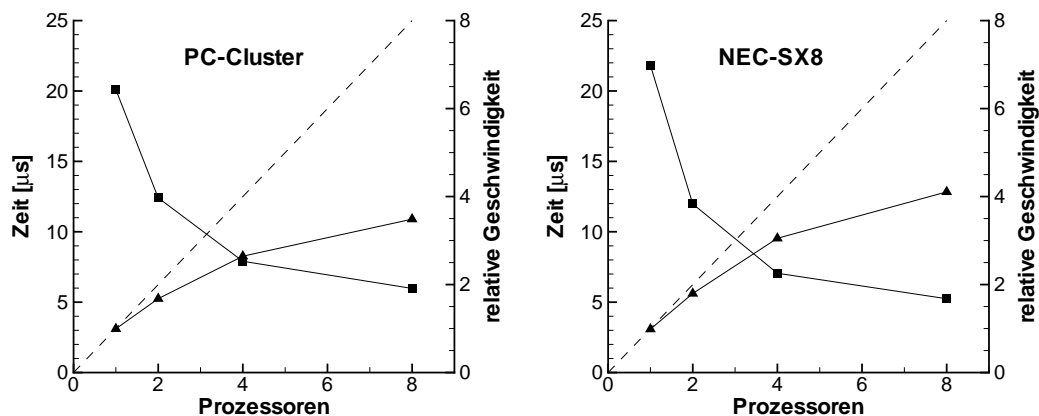
Während auf dem PC-Cluster nur ein geringer Unterschied in der Rechengeschwindigkeit für die beiden Gittertypen besteht, ist auf einem NEC-SX8 Vektorrechner das Lösungsverfahren auf dem konventionellen Gitter bei Verwendung von einem, zwei oder vier Prozessoren um jeweils 29% bis 33% schneller als auf dem Chimären-Gitter, vgl. Bild 5.28a, rechts. Die Verlangsamung der Geschwindigkeit der Chimären-Rechnung ist auf eine Verkürzung der Vektorlängen infolge der hohen Anzahl kleiner Netzblöcke zurückzuführen.

Die Lochdefinition und die Suche nach Spenderzellen erfolgt bei einer Chimären-Rechnung vor der eigentlichen Strömungsberechnung. Daher wird beim Durchlaufen der entsprechenden Algorithmen noch nicht der gesamte Speicherplatz benötigt, so dass auf dem PC-Cluster der Zeitbedarf dieser Verfahren für die F11-Konfiguration auch für einen oder zwei Prozessoren bestimmt werden kann. Wie in Bild 5.28b, links dargestellt, dauert bei einer sequentiellen Rechnung auf dem PC-Cluster das Ausführen der Lochdefinition und der Suche bezogen auf eine Zelle des Rechengitters  $20,1 \mu\text{s}$ . Der Zeitbedarf beträgt somit die Hälfte der Dauer einer Iteration des Lösungsverfahrens, welche umgerechnet  $4 \times 10,2 \mu\text{s} = 40,8 \mu\text{s}$  erfordert. Bezüglich der parallelen Rechengeschwindigkeit lässt sich ein ähnliches Verhalten feststellen, wie bereits für den L1T2-Testfall diskutiert wurde.

Die Lochdefinition und die Suche nach einer Spenderzelle dauert bei einer sequentiellen Rechnung auf dem NEC-SX8 Vektorrechner mit  $21,5 \mu\text{s}$  pro Zelle sieben mal so lange wie eine Iteration des Lösungsverfahrens, welche  $3,1 \mu\text{s}$  pro Zelle erfordert, siehe Bild 5.28b, rechts. Dieses im Vergleich zur skalaren Architektur sehr schlechte Verhältnis ist auf die prinzipiell nicht mögliche Vektorisierung des rekursiv ablaufenden ADT-Suchverfahrens zurückzuführen. Die Geschwindigkeitszunahme bei paral-



a) Rechengeschwindigkeit pro Iteration pro Zelle



b) Rechengeschwindigkeit bei Lochdefinition und Suche pro Zelle

Bild 5.28: Rechengeschwindigkeit für F11-Konfiguration mit Chimären-Gitter und konventionellem Gitter bezogen auf eine Zelle der Gitter auf PC-Cluster und NEC-SX6, ■, □ : Zeit, ▲, △ : relative Rechengeschwindigkeit, ausgefüllte Symbole gelten für das Chimären-Netz, --- : idealer Geschwindigkeitsanstieg

lenen Rechnungen ist auf dem Vektorcomputer ähnlich wie auf dem PC-Cluster.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Ausführungszeit des Strömungslösers pro Iteration durch die Nutzung der Chimären-Technik für die hier verwendeten Gitter um 10% (Skalarrechner) bzw. 33% (Vektorrechner) verlangsamt wird. Die Lochdefinitions- und Suchalgorithmen werden bei einer stationären Rechnung nur einmal ausgeführt, so dass die von ihnen benötigte Zeit gegenüber der Gesamtrechnungszeit vernachlässigt werden kann.

## 6 Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren vorgestellt, welches die Berechnung der reibungsbehafteten Umströmung komplexer Körpergeometrien im Vergleich zu konventionellen blockstrukturierten Strömungslösern deutlich vereinfacht. Dies wird durch eine intensive Nutzung der Chimären-Technik erreicht. Die Rechengitter bestehen aus unabhängig voneinander erstellten Komponentengittern, die in ein automatisiert erstelltes, kartesisches Mehrblockgitter mit hängenden Netzknoten als Hintergrundgitter eingebettet sind. Die Netzfeinheit des Hintergrundgitters ist an die Zellgröße der Komponentengitter adaptiert, wobei in dem Hintergrundgitter neben würfelförmigen Zellen auch quaderförmige Zellen auftreten können.

Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen dient der Strömungslöser FLOWer, der in seiner Ausgangsversion keine Strömungsberechnungen auf dem beschriebenen Gittertyp erlaubte. Dies war erst nach wesentlichen Erweiterungen der Chimären-Algorithmen und der Implementierung einer flusskonservativen Randbedingung für die hängenden Netzknoten möglich. Bei dem schließlich genutzten Chimären-Verfahren erfolgt die Lochdefinition mit Hilfe von Lochdefinitionsgittern, die eine genaue Steuerung der auszublendenden Gitterbereiche erlauben. Für die Suche nach Spenderzellen für die Dateninterpolation wird ein robustes Alternating-Digital-Tree Suchverfahren genutzt. Bei kartesischen Gittern kann stattdessen auch ein spezialisierter, schneller Suchalgorithmus verwendet werden. Zur trilinearen Interpolation der Strömungsgrößen werden die Spenderzellen in sechs Tetraeder aufgespalten. Ein Projektionsverfahren stellt sicher, dass bei Netzüberlappungen auf Körperoberflächen trotz der unterschiedlich diskretisierten Oberflächen die Interpolationskoeffizienten genau berechnet werden. Durch die Einführung virtueller Empfängerpunkte ist dabei eine Veränderung der Rechengitter nicht erforderlich. Sämtliche Chimären-Algorithmen wurden im Rahmen der Arbeit parallelisiert.

Für die Berechnung der am Körper angreifenden Kräfte und Momente bei Chimären-Gittern mit Netzüberlappungen auf Körperoberflächen wurde ein Verfahren entwickelt, welches die Überlappungen entfernt und die resultierenden Spalte mit einem Dreiecksgitter auffüllt. Die nun eindeutig definierte Oberfläche erlaubt die korrekte Berechnung der Kräfte und Momente. Die Triangulierung der Spalten erfordert auch bei komplexen Spaltgeometrien keine Sonderbehandlungen. Zusätzlich erfüllt das Dreiecksgitter die Delauny-Bedingung, wodurch eine hohe Genauigkeit bei der Kraftberechnung erreicht wird.

Die einfache und schnelle Erzeugung von Hintergrundgittern für Chimären-Rechnungen erfolgt mit einem automatisiert ablaufenden Netzgenerierer. Dieser bestimmt zunächst mit einem im Rahmen der Arbeit entwickelten Geometriesensor für die Zel-

len der Komponentengitter die Abmessungen ähnlicher, beliebig quaderförmiger Zellen. Anschließend wird das Hintergrundgitter durch fortgesetztes Unterteilen und Verfeinern eines groben Ausgangsnetzes an die erforderlichen Zellabmessungen adaptiert. Zur Speicherung der Netzdaten des kartesischen Hintergrundgitters dient ein ADT-Suchbaum, der sowohl Gitter mit würfelförmigen Zellen als auch solche mit quaderförmigen Zellen speichern kann. Durch Zusammenfassen von Netzblöcken mit Hilfe der „Method of the Weakest Descent“ wird die Zahl der ursprünglich erzeugten Netzblöcke auf ca. ein Zehntel verringert.

Zur Verifikation der Chimären-Technik und der Behandlung der hängenden Netzknoten wurden Netzkonvergenzstudien für ein reibungslos umströmtes NACA0012-Profil und für ein viskos umströmtes L1T2-Dreielementprofil durchgeführt. Die Untersuchungen ergaben ein konsistentes Verhalten der Algorithmen und belegten die Verfahrensgenauigkeit von zweiter Ordnung.

Die Validierung der neu eingeführten Flexibilisierungstechniken erfolgte an drei Konfigurationen mit steigender Komplexität. Für das L1T2-Dreielementprofil wurden Druckverteilungen, Auftriebskennlinien und Polaren ermittelt. Als einfacher, dreidimensionaler Testfall wurde die Umströmung eines Hubschrauberrumpfs untersucht. Druckverteilungen, Auftriebskennlinien und Polaren wurden auch für die komplexe F11-Flugzeug-Hochauftriebskonfiguration bestimmt. Alle Strömungssimulationen auf den Chimären-Gittern zeigten eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Messergebnissen. Vergleichsrechnungen mit konventionellen Mehrblockgittern belegen, dass mit Chimären-Gittern und mit konventionellen Mehrblockgittern nahezu identische Strömungslösungen berechnet werden können. Bei allen Verifikations- und Validierungsrechnungen zeigten sich keine Beschränkungen bezüglich der für Chimären-Rechnungen nutzbaren Lösungsalgorithmen, wie Mehrgitterbeschleunigungstechnik, Vorkonditionierung und  $k\omega$ -Turbulenzmodell.

Die Generierung der Rechengitter für die verschiedenen Verifikations- und Validierungstestfälle wurde durch die Nutzung überlappender Netze im Vergleich zu einer Erzeugung von konventionellen Netzen deutlich vereinfacht. Die weitgehend unabhängige Vernetzung der einzelnen Komponenten einer Konfiguration ermöglichte die Verwendung einfacher Netztopologien. Dies führte neben einer Zeitersparnis auch zu einer besseren Netzqualität, da gescherte Zellen vermieden werden konnten. Als wesentlicher Vorteil der Chimären-Technik können auch bereits vorhandene Gitter um zusätzliche Komponenten ergänzt werden. Dies wurde am Beispiel des Gitters um den Rumpf eines Hubschrauber-Windkanalmodells nachgewiesen, welches mit einem Netz um den Bauchstiel ergänzt wurde.

Infolge der hohen Anzahl der Netzblöcke des Hintergrundgitters ist bei einem Chimären-Gittersystem im Vergleich zu einem konventionellen Gitter ein erhöhter Aufwand für den Datenaustausch an Blockübergängen erforderlich. Dies äußert sich in einem gesteigerten Rechenzeitbedarf von 10% bei einer skalaren PC-Architektur und 33% bei Nutzung eines NEC-SX8 Vektorrechners. Die Geschwindigkeitssteigerung bei parallelen Rechnungen wird durch das Chimären-Verfahren nicht beeinträchtigt. Der Zeitbedarf für die Lochdefinition und die Suche nach Spenderzellen kann bei stationären Strömungssimulationen vernachlässigt werden.

Als Ausblick sollte in zukünftigen Arbeiten die Anwendung der Chimären-Technik für instationäre Strömungssimulationen untersucht werden. Die dafür erforderlichen numerischen Methoden liegen als Ergebnis der vorliegenden Arbeit bereits vor.





# Literaturverzeichnis

- [1] AFTOSMIS, M. J.: Solution Adaptive Cartesian Grid Methods for Aerodynamic Flows with Complex Geometry. In: *Lecture Notes for the 28th Computational Fluid Dynamics Lecture Series*, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgien, 3. - 7. März 1997
- [2] AIAA: Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations. *AIAA G-077-1998*, 1998
- [3] AUMANN, P.; BARNEWITZ, H.; SCHWARTEN, H.; BECKER, K.; HEINRICH, R.; ROLL, B.; GALLE, M.; KROLL, N.; GERHOLD, T.; SCHWAMMBORN, D.; FRANKKE, M.: MEGAFLOW: Parallel Complete Aircraft CFD. In: *Parallel Computing*, Bd. 27, 2001, S. 415–440
- [4] BARSZCZ, E.; WEERATUNGA, S. K.; MEAKIN, R. L.: Dynamic Overset Grid Communication on Distributed Memory Parallel Processors. *AIAA Paper 93-3311*, 1993
- [5] BAYSAL, O.; FOULADI, K.; LESSARD, V. R.: Multigrid and Upwind Viscous Flow Solver on Three-Dimensional Overlapped and Embedded Grids. In: *AIAA Journal*, Bd. 29, Nr. 6, 1991, S. 903–910
- [6] BECKER, K.: Perspectives for CFD. In: *Konferenzband DGLR Kongress 2002*, Beitrag DGLR-2002-013, Stuttgart, 23. - 26. September 2002
- [7] BELK, D. M.; MAPLE, R. C.: Automated Assembly of Structured Grids for Moving Body Problems. *AIAA Paper 95-1680*, 1995
- [8] BENEK, J. A.; STEGER, J. L.; DOUGHERTY, F. C.: A Flexible Grid Embedding Technique with Application to the Euler Equations. *AIAA Paper 83-1944*, 1983
- [9] BENEK, J. A.; BUNING, P. G. STEGER, J. L.: A 3-D Chimera Grid Embedding Technique. *AIAA Paper 85-1523*, 1985
- [10] BENOIT, C.: Numerical Simulation of 2D Blade Vortex Interaction Using Moving Overset Grids. In: *Proceedings of the 25th European Rotorcraft Forum*, Paper B11, Rom, Italien, 14. - 16. September 1999
- [11] BENOIT, C.; JEANFAIVRE, G.: 3D Inviscid Isolated Rotor and Fuselage Calculations Using Chimera and Automatic Cartesian Partitioning Methods. In: *Proceedings of the AHS Aeromechanics Specialists' Meeting 2002*, Atlanta, Georgia, USA, 13. - 15. November 2000

- [12] BENOIT, C.: persönliche Mitteilung, 2004
- [13] BERGER, M.; AFTOSMIS, M.: Aspects (and Aspect Ratios) of Cartesian Mesh Methods. In: *Proceedings of the 16th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Arcachon, Frankreich, 1998
- [14] BLAYLOCK, T. A.; ONSLOW, S. H.; ALBONE, C. M.: Mesh Generation and Flow Solution for Complex Configurations Using the FAME System. In: *Proceedings of the 1993 European Forum on Recent Developments and Applications in Aeronautical CFD*, Royal Aeronautical Society, Bristol, England, 1. - 3. September 1993, S. 8.1–8.14
- [15] BLAZEK, J.: *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier, 2001
- [16] BREZILLON, J.: *Synthesis of the Wind Tunnel Tests Performed on the DGV 200 Fuselage in F1 Wind Tunnel*. ONERA Technical Report N° RT 62/06646 DAAP, 2003
- [17] BONET, J.; PERAIRE, J.: An Alternating Digital Tree (ADT) Algorithm for 3D Geometric Searching and Intersection Problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 31, 1991, S. 1–17
- [18] BRODERSEN, O.; HEPPELLE, M.; RONZHEIMER, A.; ROSSOW, C.-C.; SCHÖNING, B.: The Parametric Grid Generation System MegaCads. In: Soni, B. K.; Thompson, J. F.; Häuser, J.; Eiseman, P. (Hrsg.): *Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*, NSF Engineering Research Center, Mississippi State University, 1996, S. 353–362
- [19] CALI, P. M.; COUAILLIER, V.: Conservative Interfacing for Overset Grids. *AIAA Paper 2000-1008*, 2000
- [20] CAMBIER, L.; GAZAIX, M.: elsA: An efficient Object-Oriented Solution to CFD Complexity. *AIAA Paper 2002-0108*, 2002
- [21] CHAN W. M.; BUNING, P. G.: Zipper Grids for Force and Moment Computation on Overset Grids. *AIAA Paper 95-1681*, 1995
- [22] CHAN, W. M.; MEAKIN, R. L.; POTSDAM, M. A.: CHSSI Software for Geometrically Complex Unsteady Aerodynamic Applications. *AIAA Paper 2001-0593*, 2001
- [23] CHAN, W. M.: The OVERGRID Interface for Computational Simulations on Overset Grids. *AIAA Paper 2002-3188*, 2002
- [24] CHAN, W. M.; GOMEZ III, R. J.; ROGERS, S. E.; BUNING, P. G.: Best Practices in Overset Grid Generation. *AIAA Paper 2002-3191*, 2002
- [25] CHAWLA, K.; BANKS, D. W.: Tracking Flow Features Using Overset Grids. *AIAA Paper 93-0197*, 1993

- [26] CHESSHIRE, G.; HENSHAW, W. D.: Composite Overlapping Meshes for the Solution of Partial Differential Equations. In: *Journal of Computational Physics*, Bd. 90, 1990, S. 1–64
- [27] CHIU I. T.; MEAKIN, R. L.: On Automating Domain Connectivity for Overset Grids. *AIAA Paper 95-0854*, 1995
- [28] CHOI, Y.-H.; MERKLE, C. L.: The Application of Preconditioning in Viscous Flows. In: *Journal of Computational Physics*, Bd. 105, 1993, S. 207–223
- [29] D'ALASCIO, A.; PAHLKE, K.; CASTELLIN, C.; COSTES, M.: Aerodynamics of the Helicopter. Application of the Navier-Stokes Codes Developed in the Framework of the Joined German/French CFD Research Program. In: *Proceedings of the 27th European Rotorcraft Forum*, Paper 38, Moskau, Russland, 11. - 14. September 2001
- [30] D'ALASCIO, A.; BERTHE, A.: Industrial Use of Computational Fluid Dynamics in the Helicopter Design Process. In: *Proceedings of the 58th Annual Forum of the American Helicopter Society*, Montreal, Quebec, Kanada, 11. - 13. Juni 2002
- [31] DEISTER, F.: *Selbstorganisierendes hybrid-kartesisches Netzverfahren zur Berechnung von Strömungen um komplexe Konfigurationen*. VDI Fortschritt-Berichte Strömungstechnik, Nr. 430, VDI-Verlag, 2002
- [32] DURBIN, P. A.; IACCARINO, G.: An Approach to Local Refinement of Structured Grids. In: *Journal of Computational Physics*, Bd. 181, 2002, S. 639–653
- [33] EISFELD, B.; RUDNIK, R.: *Der Einfluss der Schließungskoeffizienten und der  $\omega$ -Wandrandbedingung auf die Lösung der RANS-Gleichungen mit dem  $k$ - $\omega$ -Turbulenzmodell von Wilcox bei transsonischer Strömung*. DLR Institutsbericht IB 124-2002/35, 2002
- [34] EISFELD, B.: *Die Reynolds-Spannungsgleichungen für kompressible Strömungen – Herleitung und Zusammenhänge*. DLR Institutsbericht IB 124-2002/36, 2002
- [35] FASSBENDER, J. K.: *Improved Robustness for Numerical Simulation of Turbulent Flows around Civil Transport Aircraft at Flight Reynolds Numbers*. DLR Forschungsbericht 2003-09, 2003
- [36] FEJTEK, I.: Summary of Code Validation Results for a Multiple Element Airfoil Test Case. *AIAA Paper 97-1932*, 1997
- [37] GEYR, H.; KROLL, N.: Application of 3D-Preconditioning for the Prediction of Helicopter Fuselage Drag Considering Interferences with Model Support Strut. In: *Proceedings of the 20th European Rotorcraft Forum*, Paper C10, Rom, Italien, 14. - 16. September 1999
- [38] GLEIZE, V.; COSTES, M.; GEYR, H.; KROLL, N.; RENZONI, P.; AMATO, M.; KOKKALIS, A.; MUTTURA, L.; SERR, C.; LARREY, E.; FILIPPONE, A.; FISCHER, A.: Helicopter Fuselage Drag Prediction: State of the Art in Europe. *AIAA Paper 2001-0999*, 2001

- [39] HARIHARAN, N.; WANG, Z. J.; BUNING, P.: Application of Conservative Chimera Methodology in Finite Difference Settings. *AIAA Paper 97-0627*, 1997
- [40] HEINRICH, R.; KALITZIN, N.: Numerical Simulation of Three-Dimensional Flows Using the Chimera-Technique. In: Nitsche, W.; Heinemann, H.-J.; Hilbig, R. (Hrsg.): *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics II*, Notes on Numerical Fluid Dynamics, Bd. 72, Vieweg-Verlag, 1999, S. 226–233
- [41] HELLSTEN, A.: *New Two-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Applications*. Report A-21, Helsinki University of Technology, Laboratory of Aerodynamics, 2004
- [42] HOSCHEK, J.; LASSER, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner-Verlag, 1992
- [43] JACOBS, E. N.; WARD, K. E.; PINKERTON, R. M.: *The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable-Density Wind Tunnel*. NACA-Report Nr. 460, 1933
- [44] JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E.: Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. *AIAA Paper 81-1259*, 1981
- [45] JAMESON, A.; BAKER, T. J.: Solution of the Euler Equations for Complex Configurations. *AIAA Paper 83-1929*, 1983
- [46] JAMESON, A.; BAKER, T. J.: Multigrid Solution of the Euler Equations for Aircraft Configurations. *AIAA Paper 84-0093*, 1984
- [47] JAMESON, A.: Time Dependent Calculations Using Multigrid, with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings. *AIAA Paper 91-1596*, 1991
- [48] JEANFAIVRE, G.; BENOIT, C.; LE PAPE, M.-C: Improvement of the Robustness of the Chimera Method. *AIAA Paper 2002-3290*, 2002
- [49] JESPERSEN, D. C.; PULLIAM, T. H.; BUNING, P. G.: Recent Enhancements to OVERFLOW. *AIAA Paper 97-0644*, 1997
- [50] JOHNSON, F. T.; TINOCO, E.N.; YU, N.J.: Thirty Years of Development and Application of CFD at Boeing Commercial Airplanes, Seattle. *AIAA Paper 2003-3439*, 2003
- [51] JUVIGNY, X.; CANNONE, E.; BENOIT, C.: Multigrid Algorithms for the Chimera Method. *AIAA Paper 2004-0758*, 2004
- [52] KAO, K.-H.; LIOU, M.-S.; CHOW, C.-Y.: Grid Adaption Using Chimera Composite Overlapping Meshes. *AIAA Paper 93-3389*, 1993
- [53] KÖRNER, H.; RADESPIEL, R.: Some Recent Advances in Aerodynamics at DLR. *AIAA Paper 98-0136*, 1998
- [54] KROLL, N.; JAIN, R. K.: *Solution of Two-Dimensional Euler Equations – Experience with a Finite Volume Code*. DFVLR-Forschungsbericht 87-41, 1987

- [55] KROLL, N.: *Berechnung von Strömungsfeldern um Propeller und Rotoren im Schwebeflug durch die Lösung der Euler-Gleichungen*. DLR Forschungsbericht 89-37, 1989
- [56] KROLL, N.; ROSSOW, C.-C.; BECKER, K.; THIELE, F.: The MEGAFLOW Project. In: *Aerospace, Science and Technology*, Bd. 4, 2000, S. 223–237
- [57] LE PAPE, M.-C.; DARRACQ, D.; GUILLEN, P.: Design of a Chimera Unsteady Code Application to Store Separation. In: *Proceedings of the 7th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, Beijing, China, 15. - 19. September 1997
- [58] LIOU, M.-S.; KAO, K.-H.: Progress in Grid Generation: From Chimera to DRAGON Grids. In: Caughey, D. A.; Hafez, M. M. (Hrsg.): *Frontiers of Computational Fluid Dynamics*, John Wiley & Sons, 1994, S. 385–411
- [59] LÖHNER, R.: Robust, Vectorized Search Algorithms for Interpolation on Unstructured Grids. In: *Journal of Computational Physics*, Bd. 118, 1995, S. 380–387
- [60] MEAKIN, R. L.: A New Method for Establishing Intergrid Communication among Systems of Overset Grids. *AIAA Paper 91-1586*, 1991
- [61] MEAKIN, R. L.: Moving Body Overset Grid Methods for Complete Aircraft Tilt-rotor Simulations. *AIAA Paper 93-3350*, 1993
- [62] MEAKIN, R. L.: On the Spatial and Temporal Accuracy of Overset Grid Methods for Moving Body Problems. *AIAA Paper 94-1925*, 1994
- [63] MEAKIN, R. L.: An Efficient Means of Adaptive Refinement within Systems of Overset Grids. *AIAA Paper 95-1722*, 1995
- [64] MEAKIN, R. L.: Adaptive Spatial Partitioning and Refinement for Overset Structured Grids. In: *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Bd. 189, 2000, S. 1077–1117
- [65] MEAKIN, R. L.: Automatic Off-Body Grid Generation for Domains of Arbitrary Size. *AIAA Paper 2001-2536*, 2001
- [66] MEAKIN, R. L.: Object X-Rays for Cutting Holes in Composite Overset Structured Grids. *AIAA Paper 2001-2537*, 2001
- [67] MELSON, N. D.; SANETRIK, M. D.; ATKINS, H. L.: Time-Accurate Navier-Stokes Calculations with Multigrid Acceleration. In: *Proceedings of the 6th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, NASA Conference Publication 3224, 1993, S. 423–439
- [68] MENTER, F. R.: Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. In: *AIAA Journal*, Bd. 32, Nr. 8, 1994, S. 1598–1605
- [69] MOIR, I. R. M.: Measurements on a Two-Dimensional Aerofoil with High-Lift Devices. In: *AGARD-AR-303*, Bd. 2, 1994, S. A2-1–A2-12

- [70] MOON, Y. J.; LIOU, M.-S.: Conservative Treatment of Boundary Interfaces for Overlaid Grids and Multi-Level Grid Adaptations. *AIAA Paper 89-1980*, 1989
- [71] NOAK, R. W.; BELK, D. M.: Improved Interpolation for Viscous Overset Grids. *AIAA Paper 97-0199*, 1997
- [72] PÄRT-ENANDER, E.; SJÖGREEN, B.: Conservative and Non-Conservative Interpolation between Overlapping Grids for Finite Volume Solutions of Hyperbolic Problems. In: *Computers and Fluids*, Bd. 23, Nr. 3, 1994, S. 551–574
- [73] PAHLKE, K.; RADDATZ, J.: Flexibility Enhancement of Euler Codes for Rotor Flows by Chimera Techniques. In: *Proceedings of the 20th European Rotorcraft Forum*, Paper Nr. 35, Amsterdam, Niederlande, 4. - 7. Oktober 1994
- [74] PAHLKE, K.; BONIFACE, J.-C.: A Detailed Comparison of DLR and ONERA 3D Euler Methods for Rotors in High Speed Forward Flight. In: *Proceedings of the 24th European Rotorcraft Forum*, Paper AE14, Marseille, Frankreich, 15. - 17. September 1998
- [75] PAHLKE, K.: *Berechnung von Strömungsfeldern um Hubschrauberrotoren im Vorwärtsflug durch die Lösung der Euler-Gleichungen*. DLR Forschungsbericht 1999-22, 1999
- [76] PARKS, S. J.; BUNING, P. G.; STEGER, J. S.; CHAN, W. M.: Collar Grids for Intersecting Geometric Components within the Chimera Overlapped Grid Scheme. *AIAA Paper 91-1587*, 1991
- [77] PETERSSON, N. A.: An Algorithm for Assembling Overlapping Grid Systems. In: *SIAM Journal for Scientific Computing*, Bd. 20, Nr. 6, 1999, S. 1995–2022
- [78] POTSDAM, M. A.; STRAWN, R. C.: CFD Simulations of Tiltrotor Configurations in Hover. In: *Proceedings of the 58th Annual Forum of the American Helicopter Society*, Montreal, Kanada, 11. - 13. Juni 2002
- [79] PREWITT, N. C.; BELK, D. M.; MAPLE, R. C.: Multiple-Body Trajectory Calculations Using the Beggar Code. In: *Journal of Aircraft*, Bd. 36, Nr. 5, 1999, S. 802–808
- [80] PREWITT, N. C.; BELK, D. M.; SHYY, W.: Parallel Computing of Overset Grids for Aerodynamic Problems with Moving Objects. In: *Progress in Aerospace Sciences*, Bd. 36, 2000, S. 117–172
- [81] RADESPIEL, R.; SWANSON, R.: An Investigation of Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations. *AIAA Paper 89-0548*, 1989
- [82] RADESPIEL, R.; ROSSOW, C.; SWANSON, R. C.: Efficient Cell-Vertex Multigrid Scheme for the Three-Dimensional Navier-Stokes-Equations. In: *AIAA Journal*, Bd. 28, Nr. 8, 1990, S. 1464–1472
- [83] RADESPIEL, R.; TURKEL, E.; KROLL, N.: *Assessment of Preconditioning Methods*. DLR Forschungsbericht 95-29, 1995

- [84] RENAUD, T.; BENOIT, C.; BONIFACE, J.-C.; GARDAREIN, P.: Navier-Stokes Computations of a Complete Helicopter Configuration Accounting for Main and Tail Rotor Effects. In: *Proceedings of the 29th European Rotorcraft Forum*, Paper 42, Friedrichshafen, Deutschland, 16. - 18. September 2003
- [85] RIGBY, D. L.: Method of Weakest Descent for Automatic Block Merging. In: *Proceedings of the 15th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Monterey, California, USA, 24. - 28. Juni, 1996
- [86] RITZDORF, H.: The High-Level Communications Library CLIC. In: Schüller, A. (Hrsg.): *Portable Parallelization of Industrial Aerodynamic Applications (PO-PINDA), Results of a BMBF Project*, Notes on Numerical Fluid Dynamics, Bd. 71, Vieweg-Verlag, 1999, S. 33–50
- [87] ROACHE, P. J.: Quantification of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, Bd. 29, 1997, S. 123–160
- [88] ROCK, S. G.; HABCHI, S. D.: Validation of an Automated Chimera Methodology for Aircraft Escape Systems Analysis. *AIAA Paper 98-0767*, 1998
- [89] ROGERS, S. E.; ROTH, K.; NASH, S. M.; BAKER, M. D.; SLOTNICK, J. P.; WHITLOCK, M.; CAO, H. V.: Advances in Overset CFD Processes Applied to Subsonic High-Lift Aircraft. *AIAA Paper 2000-4216*, 2000
- [90] RUDNIK, R.: *Untersuchung der Leistungsfähigkeit von Zweigleichungs-Turbulenzmodellen bei Profilmströmungen*. DLR Forschungsbericht 97-49, 1997
- [91] RUDNIK, R.: Common European CFD-Code Validation for Complex High Lift Configurations – The Challenge of Coming from Observations to Conclusions. In: *DGLR Jahrbuch 2002*, Band 3, Beitrag DGLR JT2002\_015, 2002
- [92] RUMSEY, C. L.; YING, S. X.: Prediction of High Lift: Review of Present CFD Capability. In: *Progress in Aerospace Sciences*, Bd. 38, 2002, S. 145–180
- [93] SCHÖLL, E.: *Ein dreidimensionales Rechenverfahren für reibungsbehaftete Strömungen in Schaufelreihen von Turbomaschinen*. VDI Fortschritt-Berichte Strömungstechnik, Nr. 287, VDI-Verlag, 1996
- [94] SCHWARZ, T.: *Berechnung der Umströmung einer Hubschrauber-Rotor-Rumpf-Konfiguration auf Basis der Euler-Gleichungen mit der Chimären-Technik*. DLR Institutsbericht IB 129-97/23, 1997
- [95] SCHWARZ, T.: *Implementation of a Boundary Condition for Discontinuous Grid Lines into FLOWer*. DLR Institutsbericht 129-2000/28, Part 1: Theory, Part 2: Pseudo Code, 2000
- [96] SCHWARZ, T.: Enhancement of a Navier-Stokes Flow Solver for Patched Grids with Non-Coincident Grid Nodes. In: Wagner, S.; Rist, U.; Heinemann, J.; Hilbig, R. (Hrsg.): *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics III*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Bd. 77, Springer-Verlag, 2002, S. 312–319

- [97] SLOTNICK, J. P.; KANDULA, M.; BUNING, P. G.: Navier-Stokes Simulation of the Space Shuttle Launch Vehicle Flight Transsonic Flowfield Using a Large Scale Chimera Grid System. *AIAA Paper 94-1860*, 1994
- [98] SMITH, M. H.; CHAWLA, K.; VAN DALSEM, W. R.: Numerical Simulation of a Complete STOVL Aircraft in Ground Effect. *AIAA Paper 91-3293*, 1991
- [99] SMITH, M. H.; PALLIS, J. M.: MEDUSA - An Overset Grid Flow Solver for Network-Based Parallel Computer Systems. *AIAA Paper 93-3312*, 1993
- [100] SMITH, B.; BJØRSTAD, P.; GROPP, W.: *Domain Decomposition, Parallel Multi-level Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996
- [101] SNIR, M.; OTTO, S.; HUSS-LEDERMAN, S.; WALKER, D.; DONGARRA, J.: *MPI: The Complete Reference*. Bd. 1: The MPI Core, 2. Auflage, MIT Press, 1998
- [102] STEGER, J. L.; BENEK, J. A.: On the Use of Composite Grid Schemes in Computational Aerodynamics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 64, 1987, S. 301–320
- [103] SUHS, N. E.; ROGERS, S. E.; DIETZ, W. E.: PEGASUS 5: An Automated Pre-Processor for Overset-Grid CFD. *AIAA Paper 2002-3186*, 2002
- [104] TAFT, J. T.: Achieving 60 GFLOP/s on the Production CFD Code OVERFLOW-MLP. In: *Parallel Computing*, Bd. 27, 2001, S. 521–536
- [105] TINOCO, E. N.: The Changing Role of Computational Fluid Dynamics in Aircraft Design. *AIAA Paper 98-2512*, 1998
- [106] TURKEL, E.; SWANSON, R. C.; VATSA, V. N.; WHITE, J. A.: Multigrid for Hypersonic Viscous Two- and Three-Dimensional Flows. *AIAA Paper 91-1572*, 1991
- [107] TREMEL, U.; DEISTER, F.; SØRENSEN, K. A.; RIEGER, H.; WEATHERILL, N. P.: The SimSever - A Parallel Multidisciplinary Simulation Environment. In: *Konferenzband DGLR Jahrestagung, Beitrag DGLR-2003-088*, München, Deutschland, 17. - 20. November 2003
- [108] VOS, J. B.; RIZZI, A.; DARRACQ, D.; HIRSCH, E. H.: Navier-Stokes Solvers in European Aircraft Design. In: *Progress in Aerospace Sciences*, Bd. 38, 2002, S. 601–697
- [109] WANG, Z. J.: A Fully Conservative Interface Algorithm for Overlapped Grids. In: *Journal of Computational Physics*, Bd. 122, 1995, S. 96–106
- [110] WANG, Z. J.: A Fully Conservative Structured/Unstructured Chimera Grid Scheme. *AIAA Paper 95-0671*, 1995
- [111] WANG, Z. J.; YANG, H. Q.; PRZEKAS, A. J.: Implicit Conservative Interfacing for 3D Overlapped Chimera Grids. *AIAA Paper 95-1683*, 1995
- [112] WANG, Z. J.; HARIHARAN, N.; CHEN, R.: Recent Developments on the Conservation Properties of Chimera. *AIAA Paper 98-0216*, 1998



- [113] WANG, Z. J.; PARTHASARATHY, V.: A Fully Automated Chimera Methodology for Multiple Moving Body Problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Bd. 33, 2000, S. 919–938
- [114] WEY, T. C.: Development of a Mesh Interface Generator for Overlapped Structured Grids. *AIAA Paper 94-1924*, 1994
- [115] WILCOX, D.; C.: Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. In: *AIAA Journal*, Bd. 26, Nr. 11, 1988, S. 1299–1310
- [116] WILD, J.: *Numerische Optimierung von zweidimensionalen Hochauftriebskonfigurationen durch Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen*. DLR Forschungsbericht 2001-11, 2001
- [117] WISSINK, A. M.; MEAKIN, R. L.: On Parallel Implementations of Dynamic Over-set Grid Methods. In: *Proceedings of the ACM/IEEE Conference on Supercomputing '97*, San Jose, California, USA, 15. - 21. November 1997
- [118] WU, Z.-N.: Uniqueness of Steady-State Solutions for Difference Equations on Overlapping Grids. In: *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Bd. 33, Nr. 4, 1996, S. 1336–1357
- [119] ZHENG, Y.; LIOU, M.-S.: Progress in the Three-Dimensional DRAGON Grid Scheme. *AIAA Paper 2001-2540*, 2001



# A Transformationsbeziehungen für bewegte Koordinatensysteme

Die Berechnung von Strömungen auf Rechengittern, deren räumliche Lage an die Bewegung der Körper gekoppelt ist, erfordert die Darstellung von Koordinaten oder richtungsbehafteten Größen wie Geschwindigkeiten in verschiedenen Koordinatensystemen. Nachfolgend werden die Vorschriften hergeleitet, die zur Transformation der Größen beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem anzuwenden sind.

## A.1 Einfache Transformationsvorschrift

Der Zusammenhang der Darstellung der Koordinaten eines Punktes  $P$  in zwei verschiedenen Koordinatensystemen  $i$  und  $j$  ist durch die Beziehung

$${}_i\vec{r}_{i,P} = {}_i\vec{r}_{i,j} + \mathbf{T}_{i,j} {}_j\vec{r}_{j,P} \quad (\text{A.1})$$

gegeben, vergleiche Bild A.1. Dabei gibt der vor einem Ortsvektor  $\vec{r}$  stehende Index

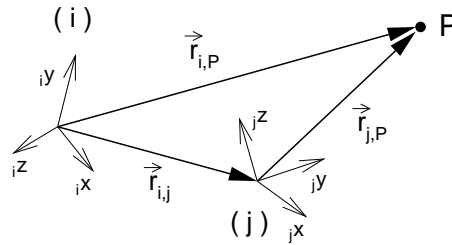


Bild A.1: Darstellung eines Punktes in zwei verschiedenen Koordinatensystemen

das Koordinatensystem an, in welchem der Vektor dargestellt ist, während die beiden hinteren Indizes den Start- und Endpunkt des Vektors bezeichnen. Somit sind  ${}_i\vec{r}_{i,P}$  und  ${}_j\vec{r}_{j,P}$  die Ortsvektoren vom Ursprung des Systems  $i$  bzw.  $j$  zum Punkt  $P$  und  ${}_i\vec{r}_{i,j}$  der Verschiebevektor des Ursprungs des Systems  $j$  gegenüber dem Ursprung des Systems  $i$ . Die Rotationsmatrix  $\mathbf{T}_{i,j} \in R^{3 \times 3}$  überführt einen Vektor aus dem System  $j$  in das System  $i$ .

Mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{i,j}$  kann eine Drehung um eine beliebige Achse realisiert werden. Für den Fall einer Drehung um die z-Achse mit Winkel  $\alpha$  lautet die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.2})$$

Für die Rotation um eine beliebige Achse mit normiertem Richtungsvektor  $\vec{n}$

$$\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^T, \quad |\vec{n}| = 1 \quad (\text{A.3})$$

kann das gegebene Koordinatensystem zunächst so transformiert werden, dass die z-Achse des resultierenden Koordinatensystems mit der Drehachse  $\vec{n}$  übereinstimmt. Nach der Rotation um die z-Achse mit Gl. (A.2) muss die Anfangsdrehung wieder rückgängig gemacht werden, so dass insgesamt gilt

$$\mathbf{T}_n = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}_z \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{-1}. \quad (\text{A.4})$$

Eine zulässige Transformationsmatrix  $\tilde{\mathbf{T}}$  mit unbekannten  $t_{kl}$  ist

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & n_x \\ t_{21} & t_{22} & n_y \\ t_{31} & t_{32} & n_z \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Durch Einsetzen von  $\tilde{\mathbf{T}}$  in Gl. (A.4) und Berücksichtigung der Orthogonalität der Matrizen  $\tilde{\mathbf{T}}$  und  $\mathbf{T}_n$  entfallen die unbekannten  $t_{kl}$  und es ergibt sich für die Rotationsmatrix  $\mathbf{T}_n$

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} n_x^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_x n_y(1 - \cos \alpha) - n_z \sin \alpha & n_x n_z(1 - \cos \alpha) + n_y \sin \alpha \\ n_x n_y(1 - \cos \alpha) + n_z \sin \alpha & n_y^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & n_y n_z(1 - \cos \alpha) - n_x \sin \alpha \\ n_x n_z(1 - \cos \alpha) - n_y \sin \alpha & n_y n_z(1 - \cos \alpha) + n_x \sin \alpha & n_z^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Da es sich bei den Koordinatensystemen um orthonormale Systeme handelt, gilt für Transformationsmatrizen die Beziehung

$$\mathbf{T}_{i,j} = \mathbf{T}_{j,i}^T = \mathbf{T}_{j,i}^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

Die Transformationsbeziehung für Geschwindigkeiten folgt durch zeitliches Ableiten von Gl. (A.1)

$${}_i\vec{q}_{i,P} = {}_i\vec{q}_{i,j} + \dot{\mathbf{T}}_{i,j} {}_j\vec{r}_{j,P} + \mathbf{T}_{i,j} {}_j\vec{q}_{j,P}, \quad (\text{A.8})$$

wobei beispielsweise  ${}_i\vec{q}_{i,P}$  die Geschwindigkeit des Punktes  $P$  relativ zum Ursprung des Systems  $i$ , angegeben in Koordinaten des Systems  $i$ , bezeichnet. Zur Darstellung aller Geschwindigkeiten in Koordinaten des Systems  $j$  wird die Gleichung von links mit  $\mathbf{T}_{j,i}$  multipliziert

$${}_j\vec{q}_{i,P} = {}_j\vec{q}_{i,j} + {}_j\boldsymbol{\Omega}_{i,j} {}_j\vec{r}_{j,P} + {}_j\vec{q}_{j,P}. \quad (\text{A.9})$$

Dabei ist  ${}_j\boldsymbol{\Omega}_{i,j}$  der schiefwinklige Tensor der Winkelgeschwindigkeiten des Systems  $j$  gegenüber dem System  $i$  angegeben in Koordinaten des Systems  $j$

$${}_j\boldsymbol{\Omega}_{i,j} = \mathbf{T}_{j,i} \dot{\mathbf{T}}_{i,j} = {}_j \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} {}_{i,j}. \quad (\text{A.10})$$

Das Produkt  ${}_j\boldsymbol{\Omega}_{i,j} {}_j\vec{r}_{j,P}$  kann auch als Kreuzprodukt zweier Vektoren dargestellt werden

$${}_j\boldsymbol{\Omega}_{i,j} {}_j\vec{r}_{j,P} = {}_j \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} {}_{i,j} \times {}_j\vec{r}_{j,P}. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Verkettung von Transformationsvorschriften

Die Transformationsvorschrift Gl. (A.1) kann auch mehrfach nacheinander angewendet werden. Dies ist z. B. notwendig, falls die Lage eines körperfesten Koordinatensystems (k) relativ zu einem ebenfalls bewegten System (k-1) angegeben ist, vgl. Bild A.2. Die Verkettung von  $n$  Transformationsvorschriften zur Beschreibung der Bewegung

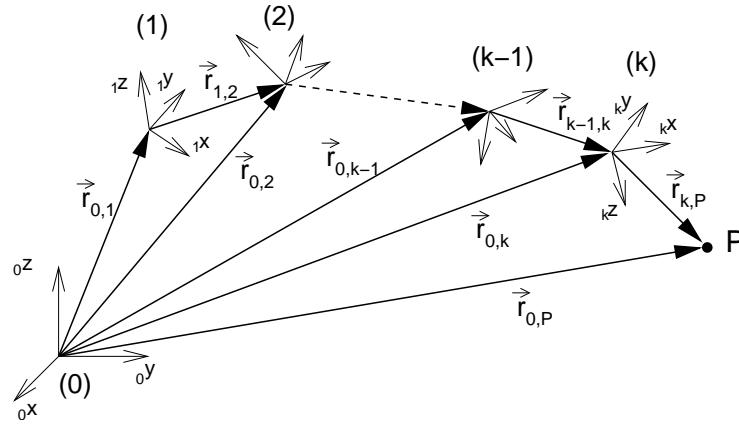


Bild A.2: Darstellung eines Punkts im inertialen Raum (0) und im System (k) bei mehreren aufeinander folgenden Transformationen

eines Punkts  $P$  im Inertialsystem (Index 0) bzw. dem System  $k$  lautet

$${}^0\vec{r}_{0,P} = {}^0\vec{r}_{0,1} + \mathbf{T}_{0,1} ({}^1\vec{r}_{1,2} + \mathbf{T}_{1,2} (\cdots ({}^{k-1}\vec{r}_{k-1,i} + \mathbf{T}_{k-1,i} {}^k\vec{r}_{k,P}))) \quad . \quad (\text{A.12})$$

Ausmultiplizieren der Gleichung unter Berücksichtigung der Transformationsbeziehung

$$\mathbf{T}_{i,l} = \mathbf{T}_{i,j} \mathbf{T}_{j,l} \quad (\text{A.13})$$

und daraus folgend

$$\mathbf{T}_{0,i} = \mathbf{T}_{0,1} \mathbf{T}_{1,2} \cdots \mathbf{T}_{i-1,i} \quad , \quad (\text{A.14})$$

gibt

$${}^0\vec{r}_{0,P} = {}^0\vec{r}_{0,1} + \mathbf{T}_{0,1} {}^1\vec{r}_{1,2} + \cdots + \mathbf{T}_{0,k-1} {}^{k-1}\vec{r}_{k-1,k} + \mathbf{T}_{0,k} {}^k\vec{r}_{k,P} \quad . \quad (\text{A.15})$$

Nach dem Zusammenfassen der ersten Glieder

$${}^0\vec{r}_{0,k} = {}^0\vec{r}_{0,1} + \mathbf{T}_{0,1} {}^1\vec{r}_{1,2} + \cdots + \mathbf{T}_{0,k-1} {}^{k-1}\vec{r}_{k-1,k} \quad (\text{A.16})$$

folgt die Transformationsbeziehung für die Darstellung des Punktes  $P$  im Inertialsystem bzw. im System  $k$

$${}^0\vec{r}_{0,P} = {}^0\vec{r}_{0,k} + \mathbf{T}_{0,k} {}^k\vec{r}_{k,P} \quad . \quad (\text{A.17})$$

Durch mehrfaches Anwenden von Gl. (A.9) kann auch die Transformationsbeziehung für die Geschwindigkeiten bei verketteten Bewegungen angegeben werden. Nach einigen Umformungen ergibt sich für die Geschwindigkeit des Punktes  $P$  in Koordinaten des Systems  $k$

$${}^k\vec{q}_{0,P} = {}^k\vec{q}_{0,k} + {}^k\boldsymbol{\Omega}_{0,k} {}^k\vec{r}_{k,P} + {}^k\vec{q}_{k,P} \quad , \quad (\text{A.18})$$

wobei  ${}_k\vec{q}_{0,k}$  rekursiv aus der Beziehung

$${}_i\vec{q}_{0,i} = \mathbf{T}_{i,i-1} ({}_{i-1}\vec{q}_{0,i-1} + {}_{i-1}\boldsymbol{\Omega}_{0,i-1} {}_{i-1}\vec{r}_{i-1,k} + {}_{i-1}\vec{q}_{i-1,k}) \quad (\text{A.19})$$

folgt. Der Tensor  ${}_i\boldsymbol{\Omega}_{0,i}$  der Winkelgeschwindigkeiten des Systems  $i$  gegenüber dem Inertialsystem berechnet sich aus der Summe der Winkelgeschwindigkeiten der Teiltransformationen

$${}_i\boldsymbol{\Omega}_{0,i} = {}_i\boldsymbol{\Omega}_{0,1} + \cdots + {}_i\boldsymbol{\Omega}_{i-1,i} \quad , \quad (\text{A.20})$$

wobei die Koordinatentransformation für Tensoren mit

$${}_m\boldsymbol{\Omega}_{i,j} = \mathbf{T}_{m,l} {}_l\boldsymbol{\Omega}_{i,j} \mathbf{T}_{l,m} \quad (\text{A.21})$$

erfolgt.

Anmerkung: In Kapitel 2.1.1 wird bei der Transformation der Navier-Stokes-Gleichungen in ein körperfestes Koordinatensystem eine Aufteilung der Geschwindigkeit in die Absolutgeschwindigkeit  $\vec{q}$  und den Geschwindigkeitsanteil aufgrund der Bewegung des Koordinatensystems  $\vec{q}_b$  vorgenommen. Der Zusammenhang zwischen Gl. (2.2) und Gl. (A.18) lautet:

$$\begin{aligned} {}_k\vec{q}_{k,P} &= {}_k\vec{q}_{0,P} - \underbrace{({}_k\vec{q}_{0,k} + {}_k\boldsymbol{\Omega}_{0,k} {}_k\vec{r}_{k,P})}_{\vec{q}_b} \\ \vec{q}_k &= \vec{q} - \vec{q}_b \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

# B Ausführliche Darstellung einiger Chimären-Algorithmen

## B.1 Genauigkeit der Interpolationsvorschrift

Bei einer Strömungssimulation auf überlappenden Rechengittern darf die Genauigkeitsordnung des Strömungslösers nicht durch die Interpolation der Strömungsdaten beeinträchtigt werden. Um die erforderliche Genauigkeitsordnung der Interpolationsvorschrift zu bestimmen, betrachten Chesshire und Henshaw [26] ein eindimensionales Modellproblem. Ausgangspunkt ihrer Untersuchung ist eine elliptische Gleichung ( $2q$ )-ter Ordnung

$$\frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}}(x) = F(x) \quad ; \quad x \in [x_L, x_R] \quad (\text{B.1})$$

mit den linken ( $R_L$ ) und rechten ( $R_R$ ) Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(x_L) &= R_{L,j} \quad ; \quad j = 0 \dots q-1 \\ \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(x_R) &= R_{R,j} \quad ; \quad j = 0 \dots q-1 . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Diese Gleichung wird auf zwei eindimensionalen, sich gegenseitig überlappenden Gittern A und B mit  $N_A$  bzw.  $N_B$  Netzpunkten gelöst. Die zur Veranschaulichung in Bild B.1 dargestellten Gitter können eine unterschiedliche Netzschriftweite  $h_A$  und  $h_B$  aufweisen. An den Rändern des Überlappungsgebiets werden an jeweils  $q$  Netzpunk-

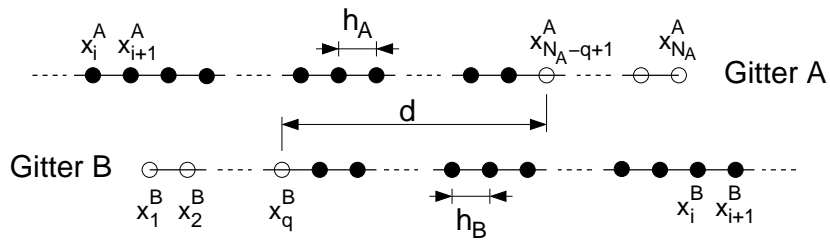


Bild B.1: Netzpunkte der eindimensionalen, sich überlappenden Rechengitter für Modellproblem,  $\bullet$  : Strömungsberechnung,  $\circ$  : Interpolation

ten Daten aus dem benachbarten Gitter interpoliert. Die Überlappungsweite  $d$  der Gitter ist durch den räumlichen Abstand der innersten Interpolationspunkte der Gitter A und B gegeben. Chesshire und Henshaw diskretisieren nun die Modellgleichung

Gl. (B.2) auf den beiden Gittern mit einer räumlichen Diskretisierungsgenauigkeit von zweiter Ordnung. Es folgt zum Beispiel für das Gitter A

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_-)^q \tilde{u}_i^A &= f_i && \text{für alle inneren Punkte} \\ \mathcal{D}_L^j \tilde{u}_j^A &= R_{L,j} && j = 0 \dots q-1, \quad \text{linke Berandung} \\ \tilde{u}_i^A &= \sum_{j=1}^{N_B} \gamma_{i,j} \tilde{u}_j^B && \text{für alle Interpolationspunkte,} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

mit

$$(\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_-) \tilde{u}_i^A = \frac{\tilde{u}_{i+1}^A - 2\tilde{u}_i^A + \tilde{u}_{i-1}^A}{h_A^2} \quad (\text{B.4})$$

und einem geeigneten Diskretisierungsoperator  $\mathcal{D}_L$  an der Berandung. Bei der Interpolationsvorschrift gelte für  $s$  Koeffizienten  $\gamma_j \neq 0$ , so dass die Interpolation eine Genauigkeit von  $s$ -ter Ordnung hat. Der Fehler zwischen der Lösung  $u$  der Differentialgleichung und der Lösung  $\tilde{u}$  der diskretisierten Gleichung berechnet sich zu

$$e_i^A = u(x_i^A) - \tilde{u}_i^A \quad \text{bzw.} \quad e_i^B = u(x_i^B) - \tilde{u}_i^B. \quad (\text{B.5})$$

Im weiteren, hier nicht dargestellten Verlauf der Analyse ermitteln die Autoren die erforderliche Genauigkeit der Interpolationsvorschrift, so dass die Interpolation die Ordnung des Fehlers  $e$  nicht vergrößert. Sie erhalten unter der Annahme, dass die Überlappungsweite  $d$  unabhängig von der Netzschrittweite  $h$  ist, die folgende Bestimmungsgleichung für die Genauigkeitsordnung der Interpolationsvorschrift  $s$

$$s = q + 1 \quad \text{falls} \quad d = O(1), \quad (\text{B.6})$$

wobei  $2q$  die Ordnung der Differentialgleichung ist. Falls sich die Überlappungsweite  $d$  dagegen mit zunehmender Netzfeinheit  $h$  verringert, gilt

$$s = 2q + 1 \quad \text{falls} \quad d \sim h. \quad (\text{B.7})$$

Die Beziehungen gelten für eine räumliche Diskretisierungsgenauigkeit von zweiter Ordnung. Analoge Formeln können auch für genauere Diskretisierungen hergeleitet werden.

Chesshire und Henshaw bestätigen die theoretisch hergeleiteten Beziehungen, indem sie eine elliptische Gleichung und die Navier-Stokes-Gleichungen auf numerischem Weg lösen und jeweils Netzkonvergenzstudien durchführen.

Der Beweis von Chesshire und Henshaw gilt für Lösungen ohne Diskontinuitäten. Die Interpolation von Strömungsgrößen in Gebieten mit Diskontinuitäten sollte daher vermieden werden. Andernfalls kann die Lösungsgenauigkeit beeinträchtigt werden. Pärt-Enander und Sjörgreen [72] sowie Cali [19] demonstrieren beispielsweise, dass bei Überschallströmungen die Ausbreitung von Verdichtungsstößen behindert werden kann.

In dieser Arbeit werden die Navier-Stokes-Gleichungen mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung gelöst. Da keine Überlappungsminimierung verwendet wird, ist die Überlappungsweite unabhängig von der Netzschrittweite. Mit  $2q = 2$  folgt nach Gl. (B.6)  $s = 2$ , so dass die Nutzung einer linearen Interpolation gerechtfertigt ist.



## B.2 Das ADT-Suchverfahren

Bei der geometrischen Datenverarbeitung müssen oftmals aus einer großen Menge an Objekten diejenigen identifiziert werden, die sich mit einem gegebenen Objekt überlappen. Falls dazu das gegebene Objekt mit allen anderen  $N$  Objekten verglichen wird, ist ein Aufwand proportional zu  $N$  Operationen erforderlich. Zur Beschleunigung kann der „Alternating Digital Tree“-Suchalgorithmus (ADT) von Bonet und Peirre [17] verwendet werden. Dieser bestimmt mit einem Aufwand proportional zu  $\log_2 N$  Operationen alle Objekte, deren minimale und maximale Erstreckung mit derjenigen des gegebenen Objekts überlappen. Die getroffene Vorauswahl der Objekte muss anschließend mit einem exakten Verfahren auf die Überlappung hin geprüft werden.

Der schnelle Datenzugriff des ADT-Verfahrens wird durch eine baumartige Datenstruktur zur Speicherung der Objekte ermöglicht. Die Datenstruktur ist die Erweiterung eines binären Suchbaums auf  $2 \cdot D$  Dimensionen zur Speicherung  $D$ -dimensionaler Objekte beliebiger Größe. Da die Objekte sowohl in den Knoten als auch in den Blättern des Baums gespeichert werden, ist der Speicherplatzbedarf proportional zu  $N$ .

Zur Beschreibung des ADT-Suchbaums wird zunächst der zugrunde liegende binäre Baum erläutert. Dieser dient zur Speicherung von Objekten, die mit einer einzigen Zahl identifizierbar sind. Für diese Zahlen wird der Wertebereich ermittelt und das erste Objekt an der Wurzel des Baums gespeichert, siehe Bild B.2, links. Zum Einsortieren des nächsten Objekts wird der Wertebereich halbiert und das Objekt je nach seinem

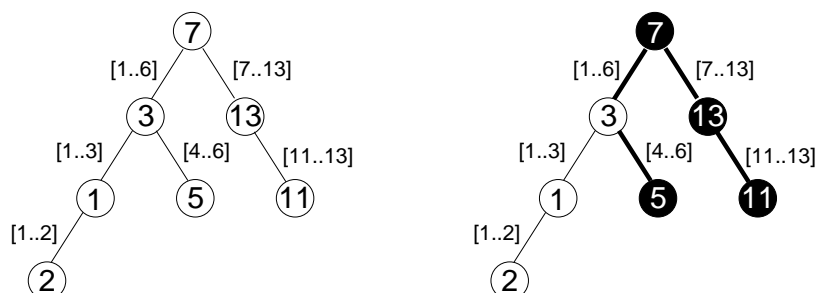


Bild B.2: Binärer Baum, links: Speicherung der Zahlenfolge 7, 13, 3, 5, 1, 2, 11, rechts: Suchpfad für alle Zahlen  $\geq 5$

Wert als linker oder rechter Sohn der Wurzel gespeichert. Analog werden die nachfolgenden Objekte einsortiert, wobei jeweils beginnend an der Wurzel unter fortgesetzter Halbierung des Wertebereichs der Baum bis zu einem freien Platz herabgestiegen wird, siehe Bild B.2, links. Der Suchbaum ist damit fertiggestellt. Um auf ein im Baum gespeichertes Objekt zuzugreifen, wird der Baum beginnend bei der Wurzel entsprechend der den Verzweigungen zugeordneten Wertebereichen herabgestiegen, bis das Objekt mit dem gesuchten Wert gefunden ist. Analog können auch alle für einen gewissen Wertebereich gespeicherten Objekte gesucht werden. Dazu wird jeweils zu einem Sohn herabgestiegen, sofern der einer Verzweigung zugeordnete Wertebereich ganz oder teilweise mit dem gesuchten Bereich übereinstimmt. Während dieses Vorgangs werden alle an den Söhnen gespeicherten Objekte überprüft, ob deren Wert innerhalb des gewünschten Wertebereichs liegt, siehe Bild B.2, rechts.

Zur Speicherung mehrdimensionaler Objekte in einem binären Suchbaum werden zunächst die minimalen und die maximalen Koordinaten eines Objekts ermittelt und in einem Vektor gespeichert. Dieses ergibt  $2 \cdot D$  Vektorkomponenten für einen  $D$ -dimensionalen Körper

$$\vec{x}_i = [x_{i,min}^1 \dots x_{i,min}^D, x_{i,max}^1 \dots x_{i,max}^D] \quad . \quad (B.8)$$

Anschließend werden die minimalen bzw. maximalen Koordinaten aller Objekte bestimmt

$$\vec{X} = [X_{min}^1 \dots X_{min}^D, X_{max}^1 \dots X_{max}^D] \quad , \quad (B.9)$$

mit

$$\begin{aligned} X_{min}^d &= \min(x_{i,min}^d \mid \forall i) \quad ; \quad d = 1 \dots D \\ X_{max}^d &= \max(x_{i,max}^d \mid \forall i) \quad ; \quad d = 1 \dots D \end{aligned} \quad (B.10)$$

Der ADT-Suchbaum wird erstellt, indem bei jeder Ebene  $E_{ADT}$  des Baums ein anderer Eintrag  $e_{ADT} = 1 \dots 2D$  des Vektors  $\vec{x}_i$  berücksichtigt wird

$$e_{ADT} = (E_{ADT} \bmod 2D) + 1 \quad , \quad (B.11)$$

wobei der Wurzel des Baums die Ebene  $E_{ADT} = 0$  zugeordnet ist und „mod“ den ganzzahligen Rest der Division  $\frac{E_{ADT}}{2D}$  angibt. Der Ausgangswertebereich an den Verzweigungen der ersten  $2D - 1$  Ebenen des Baums ist durch  $X_{min}^{\tilde{d}} \dots X_{max}^{\tilde{d}}$  mit  $\tilde{d} = (E_{ADT} \bmod D) + 1$  gegeben. Beim Herabsteigen des Baums wird für jede Ebene die ihr zugeordnete Dimension berechnet. Der Wertebereich der entsprechenden Dimension wird in zwei Intervalle aufgeteilt und entsprechend der Intervallgrenzen weiter zum linken oder rechten Sohn verzweigt.

Der Zugriff auf die im ADT-Suchbaum gespeicherten Objekte erfolgt durch Vorgabe eines Wertebereichs, innerhalb dessen sich die Koordinaten  $\vec{x}$  der Objekte befinden müssen. Für den hier interessierenden Fall der Ermittlung aller Objekte, die sich mit einem gegebenen Objekt mit minimalen und maximalen Koordinaten  $\vec{x}_s$

$$\vec{x}_s = [x_{s,min}^1 \dots x_{s,min}^D, x_{s,max}^1 \dots x_{s,max}^D] \quad (B.12)$$

überlappen, wird dazu der Ausgangswertebereich

$$\begin{aligned} X_{min}^1 &\leq x_{min}^1 \leq x_{s,max}^1, \dots, X_{min}^D \leq x_{min}^D \leq x_{s,max}^D \\ x_{s,min}^1 &\leq x_{max}^1 \leq X_{max}^1, \dots, x_{s,min}^D \leq x_{max}^D \leq X_{max}^D \end{aligned} \quad (B.13)$$

verwendet. Dabei gilt die erste Zeile für die ersten  $D$  Ebenen des Baums und die zweite Zeile für die nachfolgenden  $D$  Ebenen. Das Durchsuchen des Baums erfolgt analog zum Vorgehen beim binären Suchbaum.

In der vorliegenden Arbeit wird der ADT-Suchbaum zur Speicherung von Netzzellen verwendet. Dabei wird der Vektor  $\vec{x}_i$  nach Gl. (B.8) durch die Eckkoordinaten des Quaders definiert, welcher eine Zelle umschreibt. Der Vektor  $\vec{X}$  nach Gl. (B.9) ist durch die Eckkoordinaten eines das gesamte Gitter beinhaltenden Quaders gegeben. Der Suchbereich nach Gl. (B.12) wird schließlich ebenfalls durch die minimalen und maximalen Koordinaten eines Quaders definiert. Falls mit dem ADT-Suchalgorithmus alle Zellen gefunden werden sollen, deren umgebende Quader einen Punkt überlappen, dann gilt für den Suchbereich

$$\vec{x}_s = [x_P, y_P, z_P, x_P, y_P, z_P] \quad , \quad (B.14)$$

wobei  $x_P, y_P, z_P$  die kartesischen Koordinaten des Punkts sind.

### B.3 Maximale Ablage einer diskretisierten Oberfläche von der Originalform

Ein Oberflächengitter, welches zur Diskretisierung einer Körperoberfläche dient, weicht wegen der geraden Verbindungslinien zwischen den Netzknoten von der originalen Oberflächenform ab. Dabei ist die Abweichung um so größer, je stärker die Oberfläche gekrümmt ist. Wie in Bild B.3, links für ein zweidimensionales Beispiel gezeigt ist, kann die Ablage approximativ durch den Schnittpunkt zweier Geraden ab-

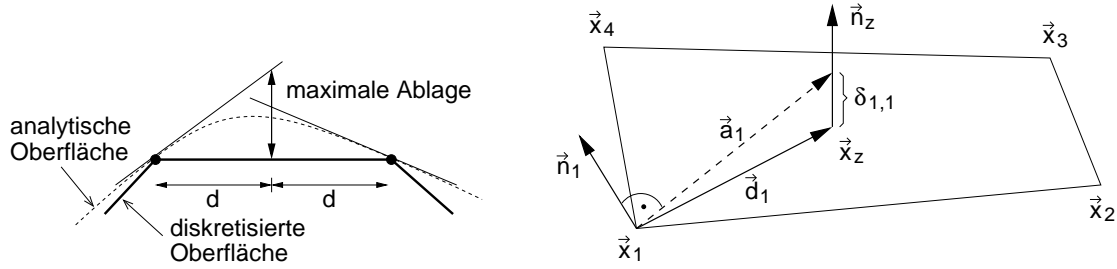


Bild B.3: Ablage der diskretisierten Oberfläche von der tatsächlichen Form, links: zweidimensionale Prinzipskizze, rechts: dreidimensionales Flächenelement

geschätzt werden, wobei die erste Gerade normal zur Oberfläche durch den Zellmittelpunkt gebildet wird und die zweite Gerade tangential durch die benachbarten Netzknoten verläuft. Da die Krümmung der Oberfläche zwischen den Netzknoten nicht berücksichtigt wird, ist die tatsächliche Ablage im Allgemeinen geringer. Für die Ablage des in Bild B.3, rechts gezeigten dreidimensionalen Oberflächenelements gelten die Beziehungen

$$\vec{a}_i = \vec{d}_i + \delta_{1,i} \vec{n}_z \quad ; \quad 0 = \vec{a}_i \cdot \vec{n}_i \quad ; \quad \vec{d}_i = \vec{x}_z - \vec{x}_i \quad , \quad (\text{B.15})$$

wobei  $\vec{x}_z$  und  $\vec{x}_i$  die Koordinaten des Zentrums und eines Knotens angeben und  $\vec{n}_z$  bzw.  $\vec{n}_i$  den normierten Oberflächennormalenvektor im Zentrum bzw. an dem Knoten bezeichnen. Durch Einsetzen folgt

$$\delta_{1,i} = - \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{n}_i}{\vec{n}_z \cdot \vec{n}_i} \quad . \quad (\text{B.16})$$

Auch die Verwindung des Oberflächenelements wird in die Berechnung der Ablage einbezogen, indem die Koordinaten des Knotens auf die normal zur Oberfläche durch den Zellmittelpunkt verlaufende Gerade projiziert werden

$$\delta_{2,i} = -\vec{d}_i \cdot \vec{n}_z \quad . \quad (\text{B.17})$$

Zur Bestimmung der maximalen Ablage müssen die Gleichungen Gl. (B.16) und Gl. (B.17) für alle Knoten ausgewertet werden

$$\delta_{1,max} = \max(|\delta_{1,i}|) \quad ; \quad \delta_{2,max} = \max(|\delta_{2,i}|) \quad ; \quad i = 1 \dots 4 \quad . \quad (\text{B.18})$$

Bei unstetigen Oberflächenformen kann die berechnete Abweichung zu gering sein. Daher wird sie mit einem Sicherheitsfaktor von zwei skaliert und zusätzlich zur Vermeidung sehr kleiner bzw. sehr großer Werte auf den Bereich  $\frac{d_{max}}{100} \dots d_{max}$  limitiert,

wobei  $d_{max}$  der größte Abstand des Zentrums von den Knoten ist

$$d_{max} = \max(|\vec{d}_i|) \quad ; \quad i = 1 \dots 4 \quad . \quad (\text{B.19})$$

Die endgültige Berechnungsformel für die maximale Ablage der diskretisierten Oberfläche von der originalen lautet somit

$$\delta = \min \left( \max \left( 2 \cdot \delta_{1,max} , 2 \cdot \delta_{2,max} , \frac{d_{max}}{100} \right) d_{max} \right) \quad . \quad (\text{B.20})$$

Die Ablage  $\delta$  gilt für eine Zelle, deren Eckpunkte auf der tatsächlichen Oberfläche liegen. Bei einigen Algorithmen dieser Arbeit ist jedoch die Ablage einer Zelle eines dualen Oberflächengitters zu berechnen. Bei diesem sind die Zelleckpunkte durch die Zellmittelpunkte des originalen Oberflächengitters gegeben, die bereits eine gewisse Ablage von der originalen Oberfläche aufweisen können. Aus geometrischen Betrachtungen folgt, dass die maximale Ablage der dualen Zelle das doppelte der maximalen Ablage eines ihrer Eckpunkte beträgt.